

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA
DE MATEMÀTIQUES
Institut d'Estudis Catalans

Í n d e x

- ❑ *Tim G. Myers, Francesc Font, Vincent Cregan
i Michelle M. MacDevette*
Nanomatemàtiques: modelització matemàtica a la nanoescala 115
- ❑ *Josep Pla i Carrera*
Joseph-Louis Lagrange: *in memoriam* 135
- ❑ *Arturo Valdivia*
Matemàtica financera en temps de crisi 167
- ❑ English summaries 199



Volum 29 • Número 2 • Any 2014



Institut
d'Estudis
Catalans

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA
DE MATEMÀTIQUES
Institut d'Estudis Catalans

Volum 29 • Número 2 • Desembre 2014

BARCELONA
2014

© dels autors dels articles

Editat per la Societat Catalana de Matemàtiques
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carrer del Carme, 47
08001 Barcelona

Text revisat lingüísticament
per la Unitat de Correcció del Servei Editorial de l'IEC.

Imprès a Limpergraf, SL
Polígon industrial Can Salvatella
Carrer de Mogoda, 29-31
08210 Barberà del Vallès

ISSN: 0214-316-X
Dipòsit Legal: B. 19272-1987

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del *copyright*, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment i suport, incloent-hi la reprografia i el tractament informàtic, la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec comercial, la inclusió total o parcial en bases de dades i la consulta a través de xarxa telemàtica o d'Internet. Les infraccions d'aquests drets estan sotmeses a les sancions establertes per les lleis.

Índex

TIM G. MYERS, FRANCESC FONT, VINCENT CREGAN I MICHELLE M. MACDEVETTE	
Nanomatemàtiques: modelització matemàtica a la nanoescala.....	115
JOSEP PLA I CARRERA	
Joseph-Louis Lagrange: <i>in memoriam</i>	135
ARTURO VALDIVIA	
Matemàtica financera en temps de crisi.....	167
English summaries.....	199

Nanomatemàtiques: modelització matemàtica a la nanoescala

TIM G. MYERS, FRANCESC FONT, VINCENT CREGAN I MICHELLE M. MACDEVETTE

Resum: En aquest article exposem tres problemes estudiats recentment al grup de Matemàtica Industrial del Centre de Recerca Matemàtica, en els quals l'aproximació del continu resulta vàlida per a descriure fenòmens a la nanoescala:

1. Transferència de calor en nanofluids: els resultats experimentals que confirmen l'increment de la capacitat de transferir calor dels nanofluids respecte dels fluids estàndard són sovint contradictoris. Mitjançant una anàlisi de capa límit mostrarem com el model matemàtic utilitzat en nombroses ocasions per justificar l'increment en la transferència de calor dels nanofluids preveu, de fet, una disminució d'aquesta propietat.
2. Fusió de nanopartícules: les nanopartícules mostren un increment abrupte de la velocitat de transició de fase a mesura que el seu radi decreix. Presentarem un model matemàtic que descriu aquest fenomen. El model preveu temps totals de transició sòlid-líquid que concorden amb les observacions experimentals.
3. Increment del flux d'un fluid en nanotubs de carboni (CNT): mostrarem que els resultats experimentals sobre l'increment de flux en nanotubs de carboni es poden explicar mitjançant les equacions estàndard de la dinàmica de fluids amb la incorporació d'una capa d'extinció (*depletion layer*) a la interfície entre el fluid i el sòlid.

Paraules clau: nanotubs, nanofluids, nanopartícules, transferència de calor, conductivitat tèrmica, canvi de fase.

Classificació MSC2010: 80A20, 76T99, 80A22.

1 Introducció

La nanotecnologia tracta amb materials en què, com a mínim, la longitud d'una de les tres dimensions espacials és inferior a 100 nm. En els últims anys la nanotecnologia ha tingut un impacte extraordinari en diversos camps com la medicina, la biotecnologia, la informàtica, la producció d'energia, la construcció,

els cosmètics o l'enginyeria de materials. La recerca nanotecnològica ha estat conduïda principalment per la química, la física, la biologia i l'enginyeria i, en canvi, la matemàtica aplicada hi ha tingut un rol menys important. Tot i així, com en molts altres camps de la ciència, la modelització matemàtica podria exercir-hi un paper significatiu. En aquest article descriurem tres casos relacionats amb la nanotecnologia on la modelització matemàtica i la utilització de tècniques estàndard de la matemàtica aplicada han estat clau i han permès obtenir resultats molt rellevants.

Els problemes estudiats en les seccions que vénen a continuació són la transferència de calor en nanofluids, la transició de fase en nanopartícules i l'increment del flux d'un fluid a través de nanotubs de carboni. En cadascun dels problemes tractats els models matemàtics desenvolupats fan servir la teoria del continu, fet que ens condueix a la pregunta següent: fins a quina longitud d'escala és aplicable la teoria del continu? La resposta senzilla és que la teoria del continu es pot aplicar sempre que les variacions estadístiques de les propietats materials, com ara la densitat, siguin petites. Per als fluids aquesta variació sovint s'estima en l'1 % [1]. Basant-se en aquest valor Nguyen *et al.* [35] estimen una mida crítica de 10 i 90 nm per a líquids i gasos, respectivament. Però, comparant simulacions de dinàmica molecular amb càlculs basats en les equacions de Navier-Stokes, Travis *et al.* [44] mostren que la teoria del continu es pot aplicar a la dinàmica de l'aigua fins a 3 nm. Thomas *et al.* [43] suggereixen un valor inferior d'1.66 nm. Si es tracta de transferència de calor, la mida mínima suggerida és de 2 nm [20], encara que aquest límit pot dependre del tipus de material, i altres autors estableixen valors entre 2 i 5 nm [26, 27].

Un nanofluid és un fluid que conté nanopartícules. Observacions experimentals han mostrat que afegir nanopartícules a un fluid base pot produir una millora en la seva conductivitat tèrmica i capacitat de transferir calor. Un dels reptes importants de la societat moderna consisteix a mantenir els aparells electrònics a una temperatura òptima per al seu funcionament. En els últims anys, la grandària dels aparells s'ha anat reduint de manera progressiva fins al punt que els mecanismes actuals de refredament resulten insuficients. Els nanofluids han estat proposats com a candidats principals per a proporcionar mecanismes de refredament eficients per a les noves tecnologies. A la secció 2 investiguem un model estàndard que descriu la dinàmica d'un nanofluid i que mostra que, contràriament a l'opinió estesa, la seva capacitat de transferir calor és inferior a la del corresponent fluid base.

A més de servir com a additiu per a millorar les propietats de fluids refrigèrants, les nanopartícules tenen una gran varietat d'aplicacions a la medicina, el medi ambient, la fabricació de nous materials i l'emmagatzematge d'energia [3]. En medicina, es poden fer servir per a millorar la diagnosi i terapia d'enfermetats, com a agents portadors de fàrmacs o com a principis actius. A causa de l'estabilitat química i propietats òptiques de l'or, les nanopartícules d'aquest material són les més utilitzades. El seu ús més estès és en la teràpia d'hipertèrmia de tumors o com a agents de contrast per a l'obtenció d'imatges mèdiques [10]. En certes circumstàncies, és important que les nanopartícules,

després de completar la seva funció principal, es desintegren en petits clústers o molècules que puguin ser fàcilment expulsats del cos. A la secció 3 modelitzarem el canvi de fase sòlid-líquid en nanopartícules. Ho farem introduint modificacions pertinents al problema clàssic de Stefan, que modelitza processos de canvi de fase mitjançant la teoria del continu.

Els nanotubs de carboni (CNT) són nanoestructures cilíndriques formades a partir de grafè i que tenen propietats insòlites: són molt bons conductors tant tèrmics com elèctrics, i mostren una duresa i força mecànica inusuals. Com a conseqüència, la recerca dels possibles usos i aplicacions dels CNT s'ha intensificat de manera notable en els últims anys. Una de les aplicacions és a la indústria tèxtil i es basa en les observacions que indiquen que els CNT transporten l'aigua molt més de pressa del que prediu la teoria estàndard de la dinàmica de fluids. Articles a les revistes *Science* i *Nature* [22, 30] varen indicar inicialment un increment de la velocitat de tres ordres de magnitud. Estudis més actuals [47] estimen un factor multiplicatiu de 45 com a increment màxim. En la secció 4, fem servir un concepte de la dinàmica de fluids no newtonians per a explicar per què l'increment de la velocitat de l'aigua a través dels CNT és molt més elevat que el que prediu la teoria clàssica. El model que presentem també suggereix una interpretació física de la condició de lliscament de Navier (*Navier slip condition*).

2 Transferència de calor en nanofluids

Hi ha una gran quantitat d'articles experimentals que posen de manifest l'eficiència i l'augment de la capacitat de transferència de calor dels nanofluids: vegeu, per exemple, el recull fet a [25]. No obstant això, hi ha una quantitat creixent d'estudis que evidencien el contrari, en particular l'article de referència de Buongiorno *et al.* [9], el qual conclou que no hi ha cap augment anòmal en la conductivitat tèrmica dels nanofluids estudiats. De fet, Buongiorno [8] prèviament va desenvolupar un dels models més populars en el camp de la dinàmica de nanofluids, el qual va utilitzar per concloure que el coeficient de transferència de calor (HTC) augmenta quan la concentració de nanopartícules del fluid augmenta. Recentment MacDevette *et al.* [29] varen presentar un model quasi idèntic i, mitjançant la teoria estàndard de la capa límit, varen arribar a la conclusió contrària. També expliquen per què el resultat obtingut per Buongiorno *et al.* és diferent i per què alguns dels articles més citats que van fer servir el mateix model també arriben a conclusions errònies.

En l'estat estacionari la dinàmica d'un nanofluid es descriu mitjançant les equacions següents:

$$\nabla \cdot (\rho_{nf} \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho_{nf} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot (\tilde{\tau}), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\chi_{nf} \mathbf{u} T) = \nabla \cdot (k_{nf} \nabla T), \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \nabla \cdot \left[C_B T \nabla \phi + C_T \phi \frac{\nabla T}{T} \right], \quad (4)$$

on $\mathbf{u} = (u, v)$ és la velocitat, p la pressió, $\tilde{\tau}$ el tensor de tensions, T la temperatura i ϕ la fracció volumètrica de nanopartícules. Els paràmetres que depenen de ϕ són ρ_{nf} , χ_{nf} , k_{nf} i representen la densitat, el producte de la calor específica i la conductivitat tèrmica del nanofluid. Els subíndexs bf , np i nf indicaran fluid base, nanopartícules i nanofluid, respectivament. Els termes difusius amb els paràmetres C_B i C_T representen el moviment brownià i la termoforesi, respectivament. El moviment brownià s'inclou perquè les nanopartícules són cossos tan petits que la vibració de les molècules del fluid n'afecta el moviment. La termoforesi indica que les partícules es mouen mitjançant els gradients de temperatura, un fet que succeeix perquè les molècules calentes vibren més ràpidament que les molècules fredes. Per tant, en presència d'un gradient de temperatura les nanopartícules són empeses cap a la banda més freda. Les condicions de contorn del sistema són, per a $y = 0$,

$$k_{nf} \frac{\partial T}{\partial y} = -Q, \quad u = v = 0, \quad (5)$$

que representa un flux constant i sense lliscament. A l'entrada, $x = 0$, és

$$\phi = \phi_{in}, \quad T = T_\infty, \quad \mathbf{u} = (U, 0), \quad (6)$$

condicions que indiquen que inicialment el fluid està ben mesclat.

Per estudiar la capacitat del fluid d'extreure calor del sistema fem ús de les variables escalades de la capa límit

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{y} = \frac{y}{L} \sqrt{Re}, \quad \hat{T} = \frac{T - T_\infty}{A}, \quad (7)$$

$$\hat{u} = \frac{u}{U}, \quad \hat{v} = \frac{v}{U} \sqrt{Re}, \quad \hat{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho_{bf} U^2}, \quad (8)$$

on A correspon a una escala de temperatura encara per determinar, U és la velocitat del fluid a l'infinit (*far field velocity*), $Re = \rho_{bf} U L / \mu_{bf}$ és el número de Reynolds i μ_{bf} és la viscositat dinàmica del fluid base. Els paràmetres físics que varien els escalem amb els valors del fluid base

$$\hat{\mu}_{nf} = \frac{\mu_{nf}}{\mu_{bf}}, \quad \hat{\rho}_{nf} = \frac{\rho_{nf}}{\rho_{bf}}, \quad \hat{k}_{nf} = \frac{k_{nf}}{k_{bf}}, \quad \hat{\phi} = \frac{\phi}{\phi_{in}}, \quad \hat{\chi}_{nf} = \frac{\chi_{nf}}{\chi_{bf}}. \quad (9)$$

Eliminant els barrets de la notació, l'equació reescalada per a ϕ esdevé

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = y \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(T + \frac{T_\infty}{A} \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\lambda \phi}{T + T_\infty / A} \frac{\partial T}{\partial y} \right], \quad (10)$$

on $y = C_B A \rho_{bf} / \mu_{nf}$ i $\lambda = C_T / (C_B A)$. L'escala de temperatura queda determinada a partir de la calor proporcionada al sistema. Per tant, la condició de contorn (5) la redimensionalitzem de manera que $k_{bf} A \sqrt{Re} L^{-1} T_y = Q$, i escollim $A = Q L / (k_{bf} \sqrt{Re})$. Típicament, per a nanofluids $y \sim \mathcal{O}(10^{-5})$, de manera que el terme dominant de (10) és

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \phi \nabla \cdot (\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \approx 0. \quad (11)$$

Fent servir l'expressió de la densitat del nanofluid, $\rho_{nf} = \phi \rho_{np} + (1 - \phi) \rho_{bf}$, l'equació de continuïtat en estat estacionari (1) esdevé

$$(\phi \rho_{np} + (1 - \phi) \rho_{bf}) \nabla \cdot \mathbf{u} + (\rho_{np} - \rho_{bf}) \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0. \quad (12)$$

Partint de l'expressió (11) i substituint $\mathbf{u} \cdot \nabla \phi = -\phi \nabla \cdot \mathbf{u}$ a l'equació (12) s'obté la condició d'incompressibilitat del fluid $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Llavors, l'expressió (11) es pot escriure com

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \quad (13)$$

que indica que ϕ és constant al llarg de les línies de corrent. Físicament això significa que l'efecte del moviment brownià i de la termoforesi a la difusió és tan petit que les partícules simplement es mouen amb el fluid i no els arriba l'input de calor del contorn. El fet que y tingui un valor tan petit indica que el transport per difusió causat pel moviment brownià i per la termoforesi mai no té un rol important en el flux en la capa límit. Així mateix, que ϕ sigui constant implica que paràmetres com ρ_{nf} , μ_{nf} i k_{nf} són també constants. Com a conseqüència, el model es pot simplificar de manera considerable, i es pot aplicar una anàlisi estàndard de la capa límit a u i T . En aquest cas, les equacions en l'estat estacionari són

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (14)$$

$$\rho_i \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mathcal{O}(1/Re), \quad (15)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{O}(1/Re), \quad (16)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_i}{\chi_i Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mathcal{O}(1/Re), \quad (17)$$

on el subíndex i denota el valor a l'entrada i $Pr = \mu_{bf} \chi_{bf} / (\rho_{bf} k_{bf})$ és el número de Prandtl. L'equació (16) implica que $p = p(x)$ i com que, en acostar-nos a l'infinit, $y \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 1$, $v \rightarrow 0$, l'equació (15) ens indica que $p_x = 0$. Llavors, el problema es redueix a

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k_i}{\chi_i Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (18)$$

on $\nu_i = \mu_i / \rho_i$. Per a completar el model imposem les condicions de contorn redimensionalitzades següents:

$$u = v = 0, \quad k_i T_y = -1 \quad \text{quan } y = 0, \quad (19)$$

$$u = 1, \quad v = 0, \quad T = 0 \quad \text{quan } y \rightarrow 0. \quad (20)$$

El mètode de la integral de balanç de la calor (HBIM), descrit a [33], es pot utilitzar per trobar solucions aproximades per a la velocitat del fluid i la temperatura de la capa límit. L'HBIM consisteix a triar un polinomi per a aproximar tant la velocitat com la temperatura dins d'una capa límit finita, δ per a la velocitat i δ_T per a la temperatura. L'aproximació per a la velocitat a prop del contorn concorda satisfactòriament amb la solució exacta corresponent obtinguda mitjançant l'anomenat *mètode de Blasius* [2]. Malauradament, el problema tèrmic no té solució exacta i ens força a utilitzar un mètode aproximat.

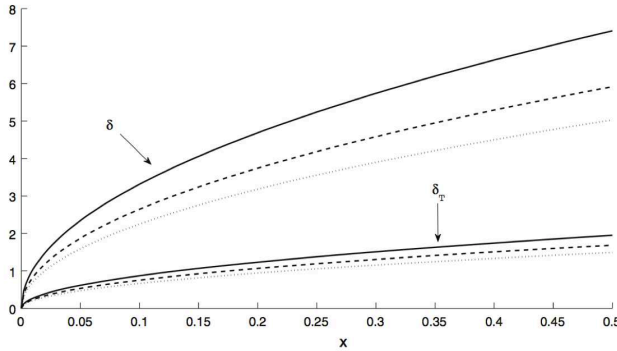


FIGURA 1: Perfils de les capes límit per a la temperatura i la velocitat per a valors de la fracció volumètrica $\phi_{in} = 1, 5, 10\%$, representades per les línies de punts, discontinúes i contínues, respectivament, per al nanofluid Al_2O_3 -aigua.

La figura 1 mostra la capa límit per a la velocitat i la temperatura en funció de la posició per a diferents valors de la fracció volumètrica $\phi_{in} = 1, 5, 10\%$, utilitzant valors dels paràmetres corresponents a aigua amb nanopartícules d'alúmina (Al_2O_3). L'amplada de la capa límit augmenta amb la fracció volumètrica, i això indica que el nanofluid pot extreure més calor amb un nombre més elevat de nanopartícules. D'altra banda, la velocitat decreix quan la fracció volumètrica creix, com es mostra en la figura 2 per als mateixos valors de ϕ , és a dir, la transferència de massa és més lenta, fet que implica un efecte advers per a la transferència de calor. Així doncs, els gràfics mostren que, per tal que el nanofluid tingui propietats físiques òptimes, s'ha de trobar una concentració òptima de nanopartícules que augmenti suficientment el flux de calor (incrementant k) sense disminuir el flux de massa de manera significativa (incrementant μ).

El paràmetre clau d'aquest estudi és el coeficient de transferència de calor (HTC). Diversos autors reivindiquen que aquest paràmetre augmenta significativament amb la concentració de nanopartícules. Una definició de l'HTC que reflecteix correctament l'input d'energia del sistema és

$$\mathcal{H} = \frac{Q \int_0^{\delta_T} \rho c u dy}{\int_0^{\delta_T} \rho c u (T - T_\infty) dy}. \quad (21)$$

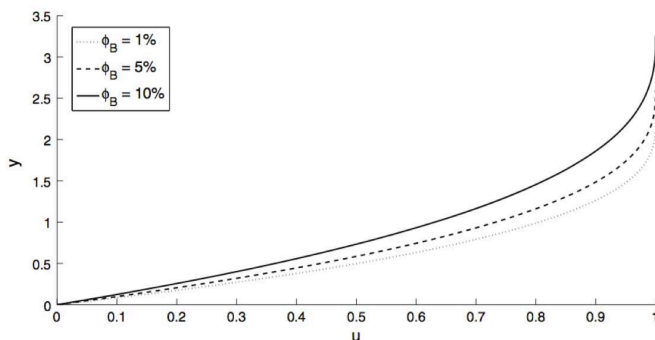


FIGURA 2: Predicció de la velocitat mitjançant l'HBIM per a les fraccions volumètriques $\phi_{in} = 1, 5, 10\%$, que corresponen a la línia de punts, discontinua i contínua, respectivament, per al nanofluid Al_2O_3 -aigua.

La figura 3 mostra l'HTC en funció de la distància, fent servir paràmetres corresponents a nanofluids d'aigua o etilenglicol com a fluid base i nanopartícules d'alúmina. Clarament, l'HTC decreix quan augmenta la fracció volumètrica. És a dir, el model mostra que l'HTC dels nanofluids no augmenta sinó que decreix, a pesar de la multitud d'estudis existents, basats en el mateix model, que afirmen totalment el contrari (per a una valoració més detallada d'alguns d'aquests estudis vegeu [29]). Per exemple, l'anàlisi de capa límit feta a Buongiorno *et al.* [9] és només vàlida en una regió tres ordres de magnitud més petita que l'amplada de la subcapa laminar i, per tant, associada incorrectament a la regió exterior del flux del fluid. Altres possibles fonts de discrepància entre l'estudi present i treballs anteriors són: interpretacions diferents de l'HTC, hipòtesis errònies per tal de reduir el grau de dificultat del model i valors incorrectes dels paràmetres utilitzats.

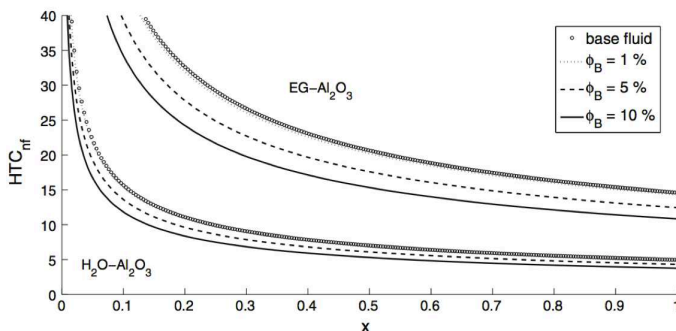


FIGURA 3: Variació de l'HTC en funció de la distància per al fluid base (cercles), etilenglicol o aigua, i $\phi_{in} = 1, 5, 10\%$, corresponents a les línies de punts, discontinua i contínua, respectivament.

El nostre treball no prova de manera concloent que els nanofluids no puguin millorar la capacitat d'extreure calor d'un sistema; és possible que l'observació d'aquest increment en alguns dels experiments sigui deguda a mecanismes físics no inclosos en el model present. A més a més, ens hem limitat a investigar nanofluids d'aigua i etilenglicol amb nanopartícules de Al_2O_3 ; altres combinacions fluid-sòlid podrien comportar un augment de la transferència de calor.

La recerca en nanofluids és un camp extremament actiu. Una àrea on els nanofluids han demostrat ser prometedors és en l'avenç de la tecnologia solar. En particular, en els captadors solars d'absorció directa (DASC). Els DASC són fluids que absorbeixen i transfereixen energia solar. No obstant això, a causa de la seva baixa capacitat d'absorció, els fluids estàndard són ineficients per a absorbir radiació solar. Per exemple, l'aigua només absorbeix un 13% de l'energia solar disponible [36]. S'ha mostrat, però, que nanopartícules disperses en el fluid del captador solar en milloren les propietats òptiques i termofísiques [15]. DASC basats en nanofluids (o NDASC) fan servir les propietats òptiques i termofísiques dels nanofluids per a absorbir i dispersar la radiació solar. Estudis experimentals recents demostren que els NDASC tenen molt potencial per a aprofitar de manera més eficient l'energia solar que els captadors solars convencionals. Per exemple, s'han trobat increments en l'eficiència del 10–30% [37, 41, 45, 50].

Actualment, els NDASC no són econòmicament viables [41]. Un dels reptes tecnològics més importants del segle XXI és el de desenvolupar un sistema, globalment i econòmicament viable, capaç de convertir energia solar en energia tèrmica de manera eficient i que pugui competir amb els sistemes actuals de generació d'energia per mitjà de combustibles fòssils. Per tal d'aconseguir-ho és imprescindible fomentar la recerca, tant teòrica com experimental, en nanofluids. Actualment, una de les línies de treball del nostre grup és, precisament, la recerca de mètodes més eficients per a convertir energia solar en energia tèrmica mitjançant els nanofluids.

3 Fusió de nanopartícules

Actualment, les nanopartícules són un tema molt actiu d'investigació gràcies a les seves propietats úniques i la gran quantitat de noves aplicacions que ofereixen en camps com l'òptica, l'electrònica, la biomedicina, la nanolitografia, etc. [3, 24, 40]. Una de les raons del seu comportament inusual és l'alt valor del quocient entre la proporció d'àtoms al volum i a la superfície de la nanopartícula, que n'afecta de manera molt significativa les propietats materials [20]. Un exemple concret és, com bé se sap, la davallada de la temperatura de fusió a mesura que la grandària de la nanopartícula es redueix [40]. Els experiments de Buffat i Borel [7] mostren una disminució de la temperatura de fusió d'uns 500 K en partícules d'or de radi lleugerament superiors a 1 nm. Les simulacions de dinàmica molecular de Shim *et al.* [40] mostren disminucions de més de 800 K per sota de la temperatura de fusió estàndard (disminució d'un 40%)

per a nanopartícules d'or de radi d'uns 0.8 nm. Els medicaments amb baixa solubilitat en aigua poden ser administrats en forma de nanopartícules per millorar-ne l'absorció. Bergese *et al.* [6] i Liu *et al.* [28] estudien antibiòtics i medicaments antianginosos, que mostren una disminució de la temperatura de fusió d'uns 30 K (disminució d'un 10%). A causa de la baixa toxicitat de l'or, les nanopartícules d'aquest material també poden ser bones portadores de medicaments o de gens per a teràpies gèniques [39]. Moltes aplicacions requereixen que les nanopartícules es dissolguin després de complir la seva funció principal i passin a través del sistema com a molècules o clústers dispersos. Per tant, és important entendre la seva resposta a estímuls tèrmics, així com el seu comportament en canviar de fase.

Si la densitat i la calor específica romanen aproximadament constants, la temperatura de fusió es pot estimar mitjançant l'expressió següent de Gibbs-Thomson generalitzada

$$L_m \left(\frac{T_m}{T_m^*} - 1 \right) + \Delta c \left[T_m \ln \left(\frac{T_m}{T_m^*} \right) + T_m^* - T_m \right] = - \frac{2\sigma_{sl}\kappa}{\rho_s}, \quad (22)$$

on L_m és la calor latent, T_m la temperatura de fusió, T_m^* la temperatura de fusió estàndard, $\Delta c = c_l - c_s$ la variació de la calor específica entre el sòlid i el líquid, σ la tensió superficial i κ la curvatura mitjana. Fem notar que considerem els canvis de pressió menyspreables. Per tant, en l'obtenció de (22), s'ha prescindit d'un terme addicional que té en compte els canvis de pressió del sistema [4]. En la figura 4 es compara l'expressió de Gibbs-Thomson generalitzada amb dades experimentals de nanopartícules d'or d'entre 2 i 12 nm [18]. La figura interior mostra que l'expressió (22) és multievaluada i resulta inadequada per a determinar la temperatura de fusió per a radis propers a la unitat. La línia contínua correspon a l'expressió de Gibbs-Thomson generalitzada i la línia discontinua representa la temperatura de fusió mitjançant l'expressió clàssica de Gibbs-Thomson (i. e., substituint $\Delta c = 0$ a (22)). Finalment, la línia de ratlles i punts correspon a la coneguda fórmula de Pawlow [18].

El model matemàtic que presentem a continuació es pot situar dins del grup conegut com a *problemes de frontera mòbil* o *problemes de Stefan* [13, 21]. Aquest model es diferencia dels models clàssics en el fet que el valor de la temperatura a la frontera mòbil no és constant sinó que depèn del temps, com succeeix en el procés de solidificació de líquids subrefredats [14, 17]. La condició de Stefan, que descriu de manera apropiada la fusió d'una nanopartícula esfèrica, és la següent:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad R < r < 1, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k}{c} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \quad (24)$$

on $T(r, t)$ representa la temperatura de la fase líquida, $\theta(r, t)$ la temperatura de la fase sòlida i $R = R(t)$ la posició de la frontera entre les dues fases.

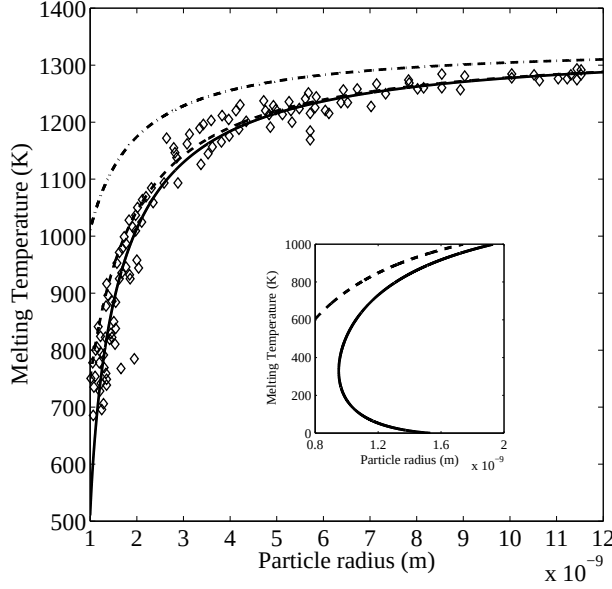


FIGURA 4: Variació de la temperatura de fusió de l'or en funció del radi de la nanopartícula. La línia contínua representa l'expressió de Gibbs-Thomson generalitzada, la discontinúua la forma reduïda ($c_l = c_s$), la de punts i ratlles és la fórmula de Pawlow i els diamants representen les dades experimentals. El gràfic interior mostra que la fórmula generalitzada de Gibbs-Thomson deixa de ser vàlida per a valors propers a 1 nm.

Les condicions de contorn són $T(1, t) = 1$, $T(R, t) = \theta(R, t) = T_m$ i $\theta_r(0, t) = 0$. Finalment, la condició de Stefan proporciona una equació per a la posició de la frontera entre el sòlid i el líquid

$$[\beta + (1 - c)T_m] \frac{dR}{dt} = k \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R}. \quad (25)$$

La temperatura de fusió redimensionalitzada, T_m , es determina via

$$0 = \beta \left(T_m + \frac{\Gamma}{R} \right) + \frac{(1 - c)}{\delta T} \left[\left(T_m + \frac{1}{\delta T} \right) \ln(T_m \delta T + 1) - T_m \right]. \quad (26)$$

Els paràmetres resultants de la redimensionalització són

$$\alpha_l = \frac{k_l}{\rho_l c_l}, \quad c = \frac{c_s}{c_l}, \quad k = \frac{k_s}{k_l},$$

$$\beta = \frac{L_m}{c_l \Delta T}, \quad \delta T = \frac{\Delta T}{T_m^*}, \quad \Gamma = \frac{2\sigma_{sl} T_m^*}{R_0 \rho_l L_m \Delta T},$$

amb $\Delta T = T_H - T_m^*$, on T_H és la temperatura aplicada a la superfície de la nanopartícula.

Amb un increment de la temperatura de $\Delta T = 10\text{ K}$ s'obté $\beta \approx 8, 40, 12$ per a l'aigua, l'or i el plom, respectivament. Òbviament, com més petit és l'increment ΔT , més gran és el valor de β . A causa del volum reduït de les nanopartícules, l'energia requerida per fondre-les és molt petita: un increment lleuger de la temperatura, ΔT , a la superfície de la nanopartícula és suficient per a fondre-la de manera pràcticament instantània. Per tant, treballar amb valors alts del número de Stefan, on $\beta \gg 1$, és una suposició raonable en aquest context. Cal destacar que un valor petit de β indica un procés de fusió ràpid, ja que la temperatura T_H és molt més gran que la temperatura de fusió, T_m^* , mentre que un valor de β elevat implica un procés lent, ja que T_H és propera a T_m^* (tot i això, els termes *ràpid* i *lent* són relatius ja que les escales de temps són de l'ordre del pico segon). Això indica una relació entre l'escala de temps i β ; per tant, fent ús d'aquesta relació reescalem el temps mitjançant $t = \beta\tau$ i busquem solucions del tipus $T = T_0 + T_1/\beta + \dots$. Per a la fase líquida tindrem

$$\mathcal{O}(1): \quad 0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_0}{\partial r} \right), \quad T_0(1, \tau) = 1, \quad T_0(R, \tau) = T_m, \quad (27)$$

$$\mathcal{O}(1/\beta): \quad \frac{\partial T_0}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad T_1(1, \tau) = 0, \quad T_1(R, \tau) = 0, \quad (28)$$

amb les solucions respectives

$$T_0 = 1 + (T_m - 1) \frac{R}{r} \left(\frac{1-r}{1-R} \right), \quad (29)$$

$$T_1 = \frac{(3R\mu_1 + T_m - 1)}{6(1-R)^2} \left\{ \left[(3-r)r - \frac{2}{r} \right] - \frac{R}{r} \left(\frac{1-r}{1-R} \right) \left[(3-R)R - \frac{2}{R} \right] \right\} \frac{dR}{d\tau}, \quad (30)$$

on

$$\mu_1 = \frac{c}{3R} \frac{\Gamma}{\left[1 + \frac{(1-c)}{\beta\delta T} \ln(T_m\delta T + 1) \right]}. \quad (31)$$

Seguint el mateix procediment per a la temperatura de la fase sòlida, θ , obtenim

$$\theta_0 = T_m, \quad \theta_1 = -\frac{\mu_2}{2kR} (R^2 - r^2) \frac{dR}{d\tau}, \quad (32)$$

on

$$\mu_2 = \frac{c}{6k} \frac{\beta\Gamma}{R^2 \left[\beta + \frac{(1-c)}{\delta T} \ln(T_m\delta T + 1) \right]}. \quad (33)$$

Substituint $T \approx T_0 + T_1/\beta$ i $\theta \approx \theta_0 + \theta_1/\beta$ a la condició de Stefan (25) resulta

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{(T_m - 1)}{R(1-R)} \left[1 + \frac{1}{\beta} \left\{ \left(1 - c - \frac{2}{R} \right) T_m + \frac{2}{R} - \mu_1 - \mu_2 \right\} \right]^{-1}, \quad (34)$$

que es pot acoblar a la forma diferencial de l'equació de Gibbs-Thomson

$$\frac{dT_m}{d\tau} = \frac{3\mu_1}{1-R} \frac{dR}{d\tau}. \quad (35)$$

Aquestes equacions estan subjectes a les condicions inicials $R(0) = 1$ i $T_m(0)$, on $T_m(0)$ es determina resolent l'equació (26) amb $R = 1$. Per tant, el sistema original, consistent en dues equacions en derivades parcials subjectes a un domini especificat per la condició de Stefan i acoblat a una equació que descriu la temperatura de fusió, s'ha pogut reduir a dues equacions diferencials ordinàries de primer ordre.

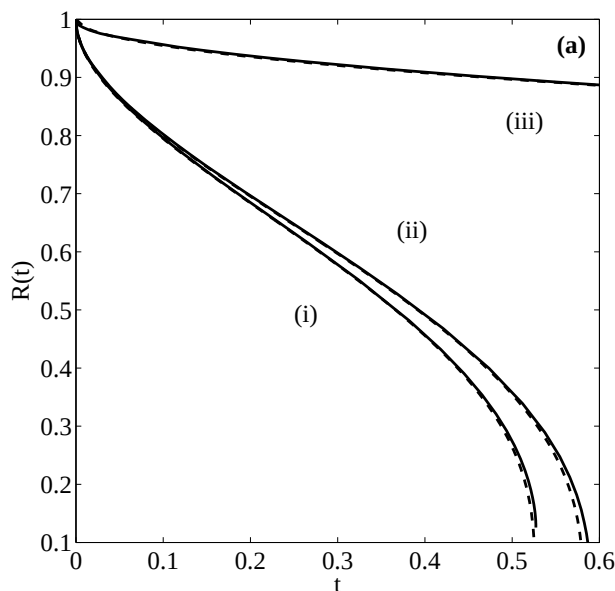


FIGURA 5: Evolució del front de canvi de fase $R(t)$ en variables redimensionalitzades (multiplicant R pel radi original, $R_0 = 10$ nm, i t per a l'escala temporal, 2.7 ps, es poden obtenir els valors a escala real).

A la figura 5 es mostra la posició de la frontera entre el sòlid i el líquid, $R(t)$, en funció del temps. Les línies discontinües corresponen a la solució aproximada i les línies contínues a la solució numèrica per diferències finites del sistema complet, (23)-(26). Els tres grups de corbes diferents corresponen a: (i) solució del model utilitzant la forma generalitzada de l'equació de Gibbs-Thomson, (ii) solució suposant $c_s = c_l$ a l'equació de Gibbs-Thomson però no a la condició de Stefan (aquesta és l'aproximació adoptada a [32]) i (iii) la solució del model més estàndard on $c_s = c_l$ i $T_m = T_m^*$ (problema clàssic de Stefan). És evident que la solució del model estàndard sobreestima de manera significativa el temps

total de transició de fase (en un ordre de magnitud). Els grups (i) i (ii) mostren que, a mesura que el radi de la fase sòlida decreix, la derivada de la corba augmenta i tendeix a infinit. En l'últim estadi de la transició es preveu que la partícula desapareixi sobtadament. Aquest fenomen de «fusió abrupta» va ser observat en els experiments descrits a [26]. A la figura 6 es mostra el perfil de la temperatura de les fases sòlida i líquida a mesura que la partícula va canviant de fase. La línia de punts indica que la temperatura de fusió decreix amb el temps; la línia discontinuïda és la temperatura de la fase sòlida, i la contínua, la de la fase líquida.

Una observació interessant en la figura 6 és el fet que la temperatura del sòlid és superior a la temperatura de fusió. Aquest fenomen no succeeix en els problemes estàndard de canvis de fase i, suposadament, és degut al fet que la temperatura de fusió decreix més ràpidament que la temperatura en el sòlid. Llavors, en contra del que passa a la macroescala, a la nanoescala el sòlid ajuda que el procés de fusió sigui més ràpid.

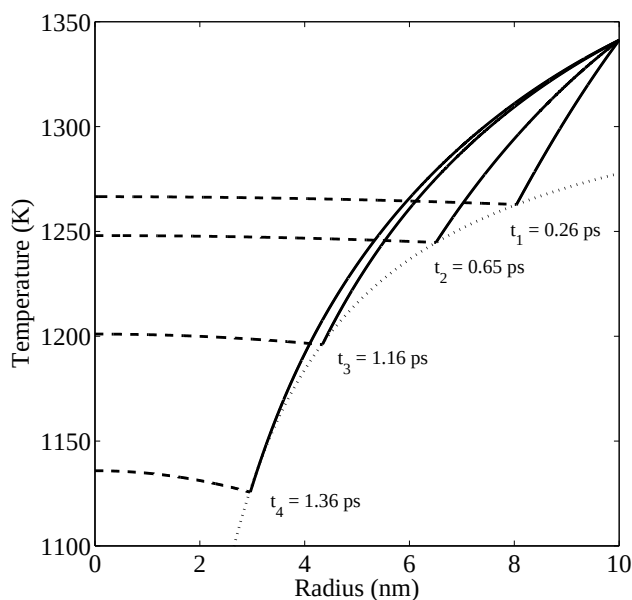


FIGURA 6: Perfils de la temperatura a l'interior d'una nanopartícula en diferents instants del procés de canvi de fase. Les línies contínues representen la temperatura de la fase líquida, les discontinuïdes la temperatura de la fase sòlida i la línia de punts representa la temperatura de canvi de fase.

A [19] es pot trobar una extensió d'aquest model on s'inclou el canvi de densitat entre les dues fases. Actualment, el nostre grup treballa per a incor-

porar a aquests models altres tipus de mecanismes de transferència de calor importants a la nanoescala, com, per exemple, el transport balístic causat per la interacció entre fonons.

4 Increment del flux d'un fluid en nanotubs de carboni (CNT)

El model clàssic que descriu el flux d'un fluid a través d'un conducte cilíndric es descriu mitjançant l'equació de Hagen-Poiseuille, que dona l'expressió següent per al flux:

$$Q_{HP} = -\pi R^4 p_z / (8\mu), \quad (36)$$

on p_z és el gradient de pressió a través del conducte, R és el radi i μ la viscositat del fluid. És un fet ben conegut que el flux d'un fluid en un CNT és significativament superior al valor que preveu (36).

Una manera freqüent d'explicar aquest augment és introduint una longitud de lliscament (*slip-length*) en el model. Això significa que la condició de no lliscament $u(R) = 0$ es reemplaça per

$$u(R) = -L_s \frac{\partial u(R)}{\partial r}, \quad (37)$$

on L_s és la longitud de lliscament i u la velocitat i així s'obté la modificació següent de l'expressió del flux:

$$Q_{slip} = Q_{HP} \left(1 + \frac{4L_s}{R} \right). \quad (38)$$

Típicament, a la bibliografia, l'increment del flux es defineix com la proporció entre el flux observat i el flux predit, $\epsilon_{slip} = Q_{slip}/Q_{HP}$. Clarament, qualsevol magnitud d'aquest increment pot ser ajustada mitjançant un valor apropiat de L_s . Si es compara la teoria amb els experiments a la microescala, s'arriba a valors raonables de la longitud de lliscament, els quals són molt inferiors a les dimensions del conducte. Quan es tracta de nanoconductes, però, les longituds de lliscament són de l'ordre de micres. Actualment, no hi ha cap teoria per a poder predir la longitud de lliscament d'un fluid que flueix en contacte amb un sòlid, però sí que n'hi ha una per als gasos. En aquest cas, la longitud de lliscament és de l'ordre de la trajectòria lliure mitjana (*mean free path*) de les molècules del gas [48] (per a l'aigua la trajectòria lliure mitjana és de 0.3 nm). Per tal de ser coherents amb les seves observacions experimentals, Holt *et al.* [22] i Majumder *et al.* [30] estimen longituds de lliscament de l'ordre de micres. Com és esperable, valors tan elevats de la longitud de lliscament en estudis sobre CNT han portat molts autors a qüestionar la validesa del model modificat de Hagen-Poiseuille [42, 46]. Cottin-Bizonne *et al.* [12] afirmen que la longitud de lliscament hauria de tenir un únic valor independent del radi del conducte i molt inferior als que es donen en estudis previs. Aquests valors experimentals tan elevats s'atribueixen a la presència de partícules hidrofòbiques contaminants.

Una explicació alternativa al comportament de la longitud de lliscament es basa en el fet que els CNT són hidrofòbics. La força d'atracció entre les molècules d'aigua és més gran que l'atracció entre el sòlid hidrofòbic i l'aigua [16]. Ha estat postulat que la hidrofobicitat es pot presentar en llacunes de gas, en una capa d'extinció o en la formació de vapor: totes les descripcions coincideixen en l'existència d'una regió de baixa viscositat propera a la paret, que experimentalment es pot interpretar com un lliscament «aparent» [16, 34]. Poyner *et al.* [38] indiquen que les seves dades de radiació de sincrotró demostren sense ambigüitats que la capa d'extinció es forma quan l'aigua es troba amb la superfície hidrofòbica. A més a més, les capes d'extinció han estat pronosticades mitjançant simulacions de dinàmica molecular [31] i observades experimentalment. Joseph *et al.* [23] varen observar una capa d'extinció de lligams d'hidrogen. Barrat *et al.* [5] varen mostrar que la primera capa de molècules d'aigua es redueix en presència d'una paret hidrofòbica.

Suposant que hi ha una capa d'extinció, les equacions estàndard de la dinàmica de fluids es poden fer servir utilitzant un model de biviscositat, amb un flux del fluid principal que ocupa el centre del conducte i una regió d'extinció propera a la paret amb una viscositat inferior. Aplicant la condició de continuïtat a la velocitat i a la tensió tallant (*shear stress*) en la interfície entre les dues regions, definida per $r = \alpha$, el flux es pot expressar com

$$Q_\mu = Q_{HP} \frac{\alpha^4}{R^4} \left[1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{R^4}{\alpha^4} - 1 \right) \right], \quad (39)$$

on μ_1 , μ_2 representen la viscositat estàndard i la viscositat de la capa d'extinció, respectivament, essent $\mu_1 \gg \mu_2$, i α és el radi de la regió principal (els experiments amb CNT indiquen un gruix de la capa d'extinció de $\delta = 0.7$ nm, i per tant $\alpha = R - 0.7$ nm). L'increment del flux es defineix com el quocient $\epsilon_\mu = Q_\mu / Q_{HP}$. Utilitzant dades de [47] s'obté que $\mu_2 \approx 0.018\mu_1$, que concorda amb el fet que la viscositat de l'aire i de l'oxigen són aproximadament 0.02 vegades la de l'aigua. Cal destacar que aquests són gasos immediatament disponibles en experiments fets amb aigua: l'aire pot ser arrossegat o estar dissolt en l'aigua, mentre que l'oxigen n'és un dels components.

Per al flux d'un gas hi ha una teoria que explica el seu lliscament sobre una superfície sòlida; tanmateix, no hi ha cap teoria que expliqui el mateix fenomen per a un fluid. En comparar les expressions anteriors per al flux d'un fluid amb lliscament i capa d'extinció s'arriba a l'expressió següent de la longitud de lliscament d'un fluid:

$$L_s = \delta \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right) \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\delta}{R} + \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{R} \right)^3 \right]. \quad (40)$$

Aquesta expressió és una funció monòtonament decreixent de R (Thomas *et al.* [42] ja havien pronosticat aquest tipus de comportament). A més, tenint en compte que $\mu_1 / \mu_2 \gg 1$, es poden identificar tres règims diferents:

1. Per a conductes suficientment amples, tals que $\delta/R \ll \mu_2/\mu_1$, llavors $\epsilon_\mu \approx 1$. No hi ha cap augment del flux apreciable i la condició de contorn de no lliscament és suficient, $L_s \approx 0$. Aquest règim és vàlid aproximadament per a $R > 3 \mu\text{m}$. És a dir, en conductes amples amb superfícies llises no s'observa cap lliscament.
2. Per a conductes d'amplada moderada, tals que $(\delta/R)(\mu_1/\mu_2)$ és d'ordre 1 però $\delta/R \ll 1$; llavors només el terme principal de L_s té un efecte rellevant i

$$\epsilon_\mu \approx 1 + \frac{4\delta}{R} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right). \quad (41)$$

Aquest règim és vàlid per a $R \in [21 \text{ nm}, 3 \mu\text{m}]$ i correspon a una longitud de lliscament constant, $L_s = \delta\mu_1/\mu_2$. Nombrosos articles constaten longituds de lliscament de 20 a 40 nm per a radis des d'uns quants nanòmetres fins a uns centenars de nanòmetres [11, 12].

3. Per a conductes molt estrets, on δ/R és de l'ordre de la unitat, s'ha de fer servir l'expressió completa de ϵ_μ i la longitud de lliscament varia amb el radi del conducte. Thomas *et al.* [43] apunten que L_s varia amb R per a $R \in [1.6, 5] \text{ nm}$ i mostren que $\epsilon \approx 32$ quan $R = 3.5 \text{ nm}$. El nostre model prediu $\epsilon \approx 33.2$ per a aquest valor de R . També prediu un increment màxim (obtingut substituint $R = \delta$) d'aproximadament 50, que concorda amb 45 de les observacions de Whitby *et al.* [47].

Si definim una viscositat mitjana, igualant els fluxos dels models amb biviscositat i viscositat única, llavors clarament la viscositat mitjana decreix amb el radi del conducte (ja que la regió d'extinció ocuparà una porció més gran del conducte quan R decreixi). Aquest resultat concorda amb simulacions fetes recentment [43, 49].

5 Conclusió

En aquest article hem descrit de manera breu tres problemes d'interès general per a la nanociència. Tot i treballar al límit de la teoria del continu, els models presentats mostren concordança amb les observacions experimentals, a més de proporcionar informació valuosa sobre diversos fenòmens característics de la nanoescala. De fet, el model de capa límit per als nanofluids contradiu la gran majoria d'estudis experimentals, però està en la línia de nous corrents de recerca i, en particular, dels resultats d'un estudi de referència que implica que molts dels experiments anteriors han arribat a conclusions errònies.

La modelització matemàtica a la nanoescala també pot proporcionar informació valuosa sobre problemes macroscòpics. Per exemple, l'absència d'una teoria per a calcular la longitud de lliscament quan un fluid es mou en contacte amb una superfície sòlida. L'estudi del flux d'un fluid en nanotubs de carboni ha portat a una expressió per a la longitud de lliscament en funció de l'amplada de la capa d'extinció i la viscositat del gas disponible. El nostre estudi més

recent sobre canvis de fase en nanopartícules [19] inclou el canvi de densitat entre les fases sòlida i líquida. Els resultats mostren que, a mesura que el radi tendeix a infinit, la diferència entre els dos models (tant si s'hi inclou com si no el canvi de densitat) es manté fixa al 15 %. El canvi en la densitat és generalment omès en el problema de Stefan, mentre que el nostre estudi mostra que aquest canvi té un paper molt important.

Agraïments

La recerca de Tim G. Myers ha estat finançada per la beca Marie Curie International Reintegration Grant Industrial Applications of Moving Boundary Problems, Grant no. FP7-256417, i la beca del Ministeri de Ciència i Innovació MTM2011-23789. Francesc Font i Michelle M. MacDevette agraeixen el suport d'una beca doctoral del Centre de Recerca Matemàtica. Vincent Cregan ha estat finançat mitjançant la beca Marie Curie International Reintegration.

Referències

- [1] ABRAGALL, P.; NGUYEN, N.-T. *Nanofluidics*. Norwood: Artech House, 2009.
- [2] ACHESON, D. J. *Elementary fluid dynamics*. Nova York: The Clarendon Press: Oxford University Press, 1990. (Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series)
- [3] AHMAD, F.; PANDEY, A. K.; HERZOG, A. B.; ROSE, J. B.; GERBA, C. P.; HASHSHAM, S. A. «Environmental applications and potential health implications of quantum dots». *J. Nanopart. Res.*, 14 (8) (2012), 1038.
- [4] ALEXIADES, V.; SOLOMON, A. D. *Mathematical modeling of melting and freezing processes*. 1a ed. Washington, D. C.: Hemisphere Publishing Corporation, 1993.
- [5] BARRAT, J.-L.; BOCQUET, L. «Influence of wetting properties on hydrodynamic boundary conditions at a fluid-solid interface». *Faraday Discuss.*, 112 (1999), 119-128.
- [6] BERGESE, P.; COLOMBO, I.; GERVASONI, D.; DEPERO, L. E. «Melting of nanostructured drugs embedded into a polymeric matrix». *J. Phys. Chem. B*, 108 (40) (2004), 15488-15493.
- [7] BUFFAT, PH.; BOREL, J.-P. «Size effect on the melting temperature of gold particles». *Phys. Rev. A*, 13 (6) (1976), 2287-2298.
- [8] BUONGIORNO, J. «Convective transport in nanofluids». *J. Heat Transfer.*, 128 (3) (2005), 240-250.
- [9] BUONGIORNO, J. [et al.]. «A benchmark study on the thermal conductivity of nanofluids». *J. Appl. Phys.*, 106 (2009), 094312.
- [10] CHERUKURI, P.; GLAZER, E. S.; CURLEY, S. A. «Targeted hyperthermia using metal nanoparticles». *Adv. Drug Deliv. Rev.*, 62 (3) (2010), 339-345.
- [11] CHOI, C.-H.; WESTIN, J. A.; BREUER, K. S. «Apparent slip flows in hydrophilic and hydrophobic microchannels». *Phys. Fluids*, 15 (10) (2003), 2897-2902.

- [12] COTTIN-BIZONNE, C.; CROSS, B.; STEINBERGER, A.; CHARLAIX, E. «Boundary slip on smooth hydrophobic surfaces: Intrinsic effects and possible artifacts». *Phys. Rev. Lett.*, 94 (5) (2005), 056102.
- [13] CRANK, J. *Free and moving boundary problems*. Oxford: Clarendon Press: Oxford University Press, 1984. (Oxford Science Publications)
- [14] DAVIS, S. H. *Theory of solidification*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. (Cambridge Monographs on Mechanics)
- [15] EASTMAN, J. A.; CHOI, S. U. S.; LI, S.; YU, W.; THOMPSON, L. J. «Anomalous increase in effective thermal conductivities of ethylene glycol-based nanofluids containing copper nanoparticles». *Appl. Phys. Lett.*, 78 (6) (2001), 718–720.
- [16] EIJKEL, J. C. T.; VAN DEN BERG, A. «Nanofluidics: What is it and what can we expect from it?». *Microfluid. Nanofluid.*, 1 (3) (2005), 249–267.
- [17] FONT, F.; MITCHELL, S.; MYERS, T. G. «One-dimensional solidification of supercooled melts». *Int. J. Heat Mass Trans.*, 62 (2013), 411–421.
- [18] FONT, F.; MYERS, T. G. «Spherically symmetric nanoparticle melting with a variable phase change temperature». *J. Nanopart. Res.*, 15 (2013), 2086.
- [19] FONT, F.; MYERS, T. G.; MITCHELL, S. L. «A mathematical model for nanoparticle melting with density change». *Microfluid. Nanofluid.* (2014). DOI: 10.1007/s10404-014-1423-x.
- [20] GUIBBIERS, G.; KAZAN, M.; VAN OVERSCHELDE, O.; WAUTELET, M.; PEREIRA, S. «Mechanical and thermal properties of metallic and semiconductive nanostructures». *J. Phys. Chem. C*, 112 (11) (2008), 4097–4103.
- [21] HILL, J. M. *One-dimensional Stefan problems: an introduction*. Harlow: Longman Scientific & Technical; Nova York: John Wiley & Sons, Inc., 1987. (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics; 31)
- [22] HOLT, J. K.; PARK, H. G.; WANG, Y.; STADERMANN, M.; ARTYUKHIN, A. B.; GRIGOROPOULOS, C. P.; NOY, A.; BAKAJIN, O. «Fast mass transport through sub-2-nanometer carbon nanotubes». *Science*, 312 (5776) (2006), 1034–1037.
- [23] JOSEPH, S.; ALURU, N. R. «Why are carbon nanotubes fast transporters of water?». *Nano Lett.*, 8 (2) (2008), 452–458.
- [24] KARMAKAR, S.; KUMAR, S.; RINALDI, R.; MARUCCIO, G. «Nano-electronics and spintronics with nanoparticles». *J. Phys.: Conf. Ser.*, 292 (2011), 012002.
- [25] KLEINSTREUER, C.; FENG, Y. «Experimental and theoretical studies of nanofluid thermal conductivity enhancement: A review». *Nanoscale Res. Lett.*, 6:229 (2011).
- [26] KOFMAN, R.; CHEYSSAC, P.; LEREAH, Y.; STELLA, A. «Melting of clusters approaching 0D». *Eur. Phys. J. D*, 9 (1) (1999), 441–444.
- [27] KUO, C.-L.; CLANCY, P. «Melting and freezing characteristics and structural properties of supported and unsupported gold nanoclusters». *J. Phys. Chem. B*, 109 (28) (2005), 13743–13754.

- [28] LIU, X.; YANG, P.; JIANG, Q. «Size effect on melting temperature of nano-structured drugs». *Mater. Chem. Phys.*, 103 (1) (2007), 1-4.
- [29] MACDEVETTE, M. M.; MYERS, T. G.; WETTON, B. «Boundary layer analysis and heat transfer of a nanofluid». *Microfluid. Nanofluid.*, 17 (2) (2014), 401-412.
- [30] MAJUMDER, M.; CHOPRA, N.; ANDREWS, R.; HINDS B. J. «Nanoscale hydrodynamics: Enhanced flow in carbon nanotubes». *Nature*, 438 (44) (2005), p. 44.
- [31] MATTHEWS, M. T.; HILL, J. M. «Nanofluidics and the Navier boundary condition». *Int. J. Nanotechnol.*, 5 (2/3) (2008), 218-242.
- [32] MCCUE, S. W.; WU, B.; HILL, J. M. «Classical two-phase Stefan problem for spheres». *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 464 (2096) (2008), 2055-2076.
- [33] MYERS, T. G. «Optimal exponent heat balance and refined integral methods applied to Stefan problems». *Int. J. Heat Mass Trans.*, 53 (5-6) (2010), 1119-1127.
- [34] NETO, C.; EVANS, D. R.; BONACCURSO, E.; BUTT, H.-J.; CRAIG, V. S. J. «Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies». *Rep. Prog. Phys.*, 68 (12) (2005), 2859-2897.
- [35] NGUYEN, N.-T.; WERELY, S. T. *Fundamentals and Applications of Microfluidics*. 2a ed. Norwood: Artech House, 2006.
- [36] OTANICAR, T. P.; PHELAN, P. E.; GOLDEN, J. S. «Optical properties of liquids for direct absorption solar thermal energy systems». *Sol. Energy*, 83 (7) (2009), 969-977.
- [37] OTANICAR, T. P.; PHELAN, P. E.; PRASHER, R. S.; ROSENGARTEN, G.; TAYLOR, R. A. «Nanofluid-based direct absorption solar collector». *J. Renewable Sustainable Energy*, 2 (2010), 033102.
- [38] POYNOR, A.; HONG, L.; ROBINSON, I. K.; GRANICK, S.; ZHANG, Z.; FENTER, P. A. «How water meets a hydrophobic surface». *Phys. Rev. Lett.*, 97 (26) (2006), 266101.
- [39] RANA, S.; BAJAJ, A.; MOUT, R.; ROTELLO, V. M. «Monolayer coated gold nanoparticles for delivery applications». *Adv. Drug Deliv. Rev.*, 64 (2) (2012), 200-216.
- [40] SHIM, J.-H.; LEE, B.-J.; CHO, Y. W. «Thermal stability of unsupported gold nanoparticle: A molecular dynamics study». *Surf. Sci.*, 512 (3) (2002), 262-268.
- [41] TAYLOR, R. A.; PHELAN, P. E.; OTANICAR, T. P.; WALKER, C. A.; NGUYEN, M.; TRIMBLE, S.; PRASHER, R. «Applicability of nanofluids in high flux solar collectors». *J. Renewable Sustainable Energy*, 3 (2011), 023104.
- [42] THOMAS, J. A.; MCGAUGHEY, A. J. H. «Reassessing fast water transport through carbon nanotubes». *Nano Lett.*, 8 (9) (2008), 2788-2793.

- [43] THOMAS, J. A.; MCGAUGHEY, A. J. H.; KUTER-ARNEBECK, O. «Pressure-driven water flow through carbon nanotubes: Insights from molecular dynamics simulation». *Int. J. Therm. Sci.*, 49 (2) (2010), 281–289.
- [44] TRAVIS, K. P.; TODD, B. D.; EVANS, D. J. «Departure from Navier-Stokes hydrodynamics in confined liquids». *Phys. Rev. E*, 55 (4) (1997), 4288–4295.
- [45] TYAGI, H.; PHELAN, P.; PRASHER, R. «Predicted efficiency of a nanofluid-based direct absorption solar receiver». *ASME*, 131 (4) (2007), 729–736.
- [46] VERWEIJ, H.; SCHILLO, M. C.; LI, J. «Fast mass transport through carbon nanotube membranes». *Small*, 3 (12) (2007), 1996–2004.
- [47] WHITBY, M.; CAGNON, L.; THANOU, M.; QUIRKE, N. «Enhanced fluid flow through nanoscale carbon pipes». *Nano Lett.*, 8 (9) (2008), 2632–2637.
- [48] WHITE, F. M. *Viscous Fluid Flow*. 2a ed. Nova York: McGraw-Hill, 1991.
- [49] YE, H.; ZHANG, H.; ZHANG, Z.; ZHENG, Y. «Size and temperature effects on the viscosity of water inside carbon nanotubes». *Nanoscale Res. Lett.*, 6 (2011), 87.
- [50] YOUSEFI, T.; VEYSIA, F.; SHOJAEIZADEH, E.; ZINADINI, S. «An experimental investigation on the effect of $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-H}_2\text{O}$ nanofluid on the efficiency of flat-plate solar collectors». *Renew. Energy*, 39 (1) (2012), 293–298.

TIM G. MYERS, VINCENT CREGAN
CENTRE DE RECERCA MATEMÀTICA
CAMPUS DE BELLATERRA, EDIFICI C
08193 BELLATERRA, BARCELONA, SPAIN

I
DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA I
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONA, SPAIN

{tmyers,vcregan}@crm.cat

FRANCESC FONT
MACSI
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS
UNIVERSITY OF LIMERICK
LIMERICK, IRELAND

francesc.font@ul.ie

MICHELLE M. MACDEVETTE
CENTRE FOR RESEARCH IN COMPUTATIONAL AND APPLIED MECHANICS
UNIVERSITY OF CAPE TOWN
CAPE TOWN, SOUTH AFRICA

michelle.macdevette@uct.ac.za

Joseph-Louis Lagrange: *in memoriam*

JOSEP PLA I CARRERA

Il ne leur a fallu qu'un moment pour faire
tomber cette tête, et cent années peut-être
ne suffiront pas pour en reproduire une sem-
blable.¹

Resum: Aquest article és un homenatge a Joseph-Louis Lagrange en ocasió del dos-cents aniversari de la seva mort. Té tres parts: una primera part de caire biogràfic; la segona recull la seva producció científica de manera molt succinta, i la tercera, la més matemàtica i extensa, explicita alguns dels resultats assolits per l'insigne matemàtic.

Paraules clau: Joseph-Louis Lagrange, biografia d'un matemàtic, història de les matemàtiques.

Classificació MSC2010: 01A50, 01A70.

1 Introducció

Joseph-Louis Lagrange és un dels grans matemàtics de l'època de la Revolució i de l'Imperi francesos —en paraules de Napoleó Bonaparte (1769–1821), «la immensa piràmide de la ciència matemàtica» (vegeu [6, edició castellana de 2010, p. 178]). Tal com ja vaig defensar en un altre indret (vegeu [89, p. 33–34]), els insignes matemàtics d'aquest període —recordem-los cronològicament: Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Marie Jean Antoine de Caritat Condorcet (1743–1794), Gaspard Monge (1746–1818), Pierre Simon Laplace (1749–1827), Adrien Marie Legendre (1752–1833), Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753–1823)— són els artífexs del desenvolupament de la nova matemàtica del segle XVIII (geometria analítica, càlcul diferencial i integral, càlcul de variacions, càlcul de probabilitats, aritmètica, aplicació de la matemàtica a

¹ Són les paraules que Lagrange li digué a Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749–1822) en conèixer la mort, a la guillotina, del seu amic Antoine Laurent Lavoisier (1743–1794), que, pels seus estudis, és considerat el pare de la química. Vegeu [16, p. 46].

la física i a l'astronomia, equacions diferencials, sèries infinites, etc.) i la van aconseguir a l'extrem de les seves possibilitats, com reconeix Lagrange (vegeu la tercera citació de la p. 138). Aquesta aportació féu indispensable una «revolució científica» (vegeu [14, edició castellana, p. 22–29]) en el món de la matemàtica: un canvi de paradigma epistemològic i metodològic.

2 Gotes biogràfiques

Podem dividir la vida de Lagrange en tres períodes ben diferenciats, que corresponen a les circumstàncies i els indrets on va desenvolupar la tasca investigadora i docent.² Aquests períodes són (vegeu [44, edició francesa de 1984, p. 309]):

- El que passa a la vila natal de Torí, on neix el dia 25 de gener de l'any 1736 i on viu fins a l'any 1766. Dura, doncs, una trentena d'anys.
- El que s'estén del 1766 al 1787 i que comprèn la seva activitat a l'Acadèmia de Berlín³ i cobreix vint-i-un anys de la seva vida.
- El que passa a París: s'inicia l'any 1787 i s'extingeix amb la seva mort, que s'esdevé el 10 d'abril de 1813 als setanta-sis anys complerts.

Joseph-Louis Lagrange neix a la ciutat italiana de Torí amb el nom de Giuseppe Lodovico Lagrangia, però des de jove signa com a Lodovico La-Grange o Luigi Lagrange, adoptant la grafia francesa en el cognom. Per naixença, doncs, és italià, però, per adopció, francès.

El seu primer treball imprès, datat el 27 de juliol de 1754, es titula *Lettera di Luigi De la Grange Tournier*.⁴

És el fill il·legítim —l'únic dels onze germans que aconsegueix arribar a l'edat adulta— de Giuseppe Francesco Lodovico —tresorer de l'Office des Travaux Publics et Fortifications de Sardènia, establert a Torí— i de Teresa Grosso —filla d'un metge de Cambiano, una ciutat propera a Torí.

La família era benestant —tant el pare com la mare provenien de famílies ben assentades econòmicament—, però l'ànsia especulativa del pare féu que, quan arribà el moment, no quedés res digne d'heretar. Aquest fet obligà Joseph-Louis a haver de treballar, un fet que considerava «la primera causa de tot el que de felicitat li esdevindria». En una ocasió, digué:



JOSEPH-LOUIS LAGRANGE
Torí, 25 de gener de 1736-
París, 10 d'abril de 1813

² Per tal de confeir aquesta biografia m'he basat en [16], [77], [44] i [6, edició castellana de 2010, p. 178–198], molt més novel·lada que les anteriors. Hom pot recórrer també a [45, p. 14–20], a «Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)» dins de la web *The MacTutor History of Mathematics archive*, i finalment a [3, p. 330–339].

³ L'Acadèmia Reial de Ciències de Prússia fou fundada a Berlín el 18 de març de 1701, quatre anys després de l'Acadèmia de les Arts de Berlín, a la qual hom es refereix també amb el nom Acadèmia de les Arts de Berlín, breument Acadèmia de Berlín. Vegeu [5, tom 1, capítol 2].

⁴ Per aprofundir en les variacions del nom al llarg de la vida, vegeu [44, edició francesa, p. 309].

Si hagués tingut fortuna familiar, probablement no hauria fet de la matemàtica el meu afer. I aleshores, quins beneficis hauria aconseguit en una altra carrera de l'època comparables als de la vida tranquil·la pròpia de l'estudiós, amb aquesta seqüela radiant d'èxits indiscutibles en un gènere eminentment difícil i amb aquesta consideració envers la meva persona que ha anat creixent dia rere dia fins ara?⁵

El seu pare desitjava que es dedicués a l'advocacia i, al començament, Joseph-Louis no hi tingué inconvenient. Fou precisament quan aprofundia en l'estudi del grec i del llatí que conegué l'obra d'Euclides (III aC) i d'Arquimedes (287 aC-212 aC), però sembla que no l'impressionaren gaire. Als disset anys, amb la lectura d'una monografia d'Edmond Halley (1656-1742) —el prestigiós astrònom anglès amic d'Isaac Newton (1642 julià, 1643 gregorià-1727)—, s'adonà de la superioritat del càlcul respecte de la geometria. En tota l'obra manté aquesta tendència que sintetitza la frase de la introducció de la *Mécanique analytique* (vegeu [76, tom 11, p. XII]):

Hom no trobarà cap figura en aquest text. Els mètodes que s'hi exposen no precisen ni de construccions ni de raonaments geomètrics o mecànics; només calen operacions algèbriques sotmeses a unes lleis regulars i uniformes. Els qui estimen l'anàlisi veuran com creix el seu domini i me n'estaran agraïts.

El Decret reial del 28 de setembre de 1755 nomena Lagrange professor de les Écoles Royales d'Artillerie amb un sou anual de 250 escuts, un tracte que, en els onze anys que Lagrange va viure a Torí, no fou millorat.

La seva tasca creativa —de la qual faré una ressenya breu a la secció 3— porta Leonhard Euler (1707-1783) a elogiar-lo davant del seu superior jeràrquic Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), president de l'Acadèmia de Berlín. En els treballs es troba una defensa inspirada del *principi de la mínima acció*, un fet que porta Maupertuis a indicar-li que, tan aviat com es presenti l'ocasió, li oferirà una càtedra a Prússia molt més avantatjosa que la de Torí. Lagrange, però, refusa l'oferiment. En contrapartida, el 2 de setembre de 1756 —quan tenia vint anys— és nomenat membre corresponent de l'Acadèmia de Berlín en la categoria d'associat estranger.



Placa dedicada a Lagrange

L'any 1757, Giuseppe Angelo Saluzzo di Menuisiglio (1734-1810), el metge Giovanni Francesco Cigna (1734-1790) i Lagrange van crear una societat científica que fou la llavor de l'Acadèmia de Ciències de Torí.⁶ Una de les tasques principals de la Societat era la publicació de les *Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensia*, en la qual la participació de Lagrange fou molt important.⁷

⁵ Vegeu [16, p. 16].

⁶ L'anomenaren Società Privata Torinese i era el primer nucli de la futura Accademia delle Scienze di Torino (1783), de la qual Saluzzo fou el president fins al 1788.

⁷ Els tres primers volums aparegueren els estius de 1759, 1762 i 1766, quan Lagrange encara vivia a Torí. El quart volum, corresponent als anys 1766-1769 i que aparegué l'any 1773, contenia

L'any 1763, Lagrange —que no havia sortit mai de Torí— marxa cap a París, on és molt ben acollit gràcies a la memòria sobre la libració de la Lluna. En el viatge de tornada a Torí sojorna a Ginebra on, aconsellat per Jean Baptiste le Rond D'Alembert (1717-1783), coneix l'il·lustre filòsof i escriptor francès François-Marie Arouet, dit *Voltaire* (1694-1778).

A la tardor de 1765, D'Alembert —amb la intenció de millorar-li la situació professional que té a Torí— li ofereix un lloc a Berlín que Lagrange refusa amb les paraules (vegeu [44, edició francesa, p. 315]):

Mentre hi hagi *monsieur* Euler no em sembla que em convingui.

Això no obstant, D'Alembert li comunica que Euler abandona Berlín per tornar a Sant Petersburg i li demana que accepti el relleu, una possibilitat que ell mateix ja havia suggerit a Frederic II el Gran.

Lagrange pren possessió del càrrec de director de la classe de matemàtiques de l'Acadèmia de Berlín el dia 6 de novembre de 1766. En aquesta ciutat fa amistat amb Jean-Henri Lambert (1728-1777) i amb Johann III Bernoulli (1744-1807).

Les obligacions que adquireix amb l'Académie són la lectura d'una memòria mensual que, en algunes ocasions, serà publicada al *Recueil de l'Académie* —en total, en publica seixanta-tres— i la direcció de treballs de matemàtiques. No té, en canvi, cap responsabilitat docent, una activitat que recuperarà, però d'una manera molt esporàdica, a l'època parisenca.

Onze mesos després d'haver-se instal·lat a Berlín es casa amb la seva cosina Vittoria Conti, que s'hi acaba de traslladar. En una carta adreçada a D'Alembert el juliol de 1769, diu (vegeu [44, edició francesa, p. 315]):

La meva dona —una cosina que ha viscut a casa de la meva família durant molt de temps— és bona mestressa de casa i, a més, no té pretensions.

El matrimoni no tingué fills. Vittoria emmalalteix i, després de suportar una malaltia llarga —durant la qual Lagrange se'n cuida amb molta dedicació—, mor l'any 1783. És en aquest període quan Lagrange expressa la seva preocupació pel futur de la matemàtica (vegeu [69]):

[...] Començo a sentir que la inèrcia creix a poc a poc i ara mateix no puc respondre del que faré els propers deu anys. Em sembla que ara la mina és massa profunda i que, si no hi ha algú que descobreixi filons nous, tard o d'hora caldrà abandonar-la.

I, tanmateix, aquests anys berlinesos són anys d'una gran productivitat en els quals consolida el càlcul i les aplicacions de les matemàtiques a la física de l'època torinesa i hi aprofundeix alhora que endega recerques en l'àlgebra de polinomis i en aritmètica, una ciència que considera heretada de Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638), malgrat les enormes aportacions degudes a Euler. L'activitat l'ajuda a superar la malaltia i la mort de Vittoria.

quatre memòries de Lagrange confegides a Berlín el 1767, 1768 i 1770. Vegeu [44, edició francesa, p. 311-312].

Aquesta feina la descriu en la carta a D'Alembert de l'1 d'abril de 1781 (vegeu [68]):

[...] Les meves ocupacions es redueixen a cultivar amb tranquil·litat i en silenci la matemàtica. No hi ha res que m'apressi i treball més per plaer que pel deure. Sóc com els grans mestres que construeixen: faig, desfaig, refaig, fins que em trobo còmode amb el treball que he elaborat, quelcom que s'esdevé molt rarament.

Una de les tasques que porta a terme després de la mort de Vittoria és el tancament de la *Mécanique analytique* —una obra que havia projectat als dinou anys durant l'època torinesa—, com podem llegir a la carta adreçada a Laplace (vegeu [71]):

He completat gairebé del tot un tractat sobre mecànica analítica que es fonamenta solament en el principi o fórmula de la primera secció de la memòria que us adjunto; no sé, però, ni quan ni a on el podré imprimir i, per això, no m'apresso a fer els darrers retocs.

La qüestió de l'edició la resol l'abat Marie, un antic amic de Legendre, que va convèncer un editor parisenc. El llibre apareix finalment l'any 1788, quan Lagrange pateix una depressió profunda.

Aquesta depressió l'ha provocada, d'una banda, la mort de Vittoria i, de l'altra, la del rei Frederic II el Gran (1712–1786), esdevinguda el 17 d'agost, amb el que això comporta de pèrdua de suport en l'àmbit científic berlinès. És aleshores quan Honoré Gabriel Riqueti, comte de Mirabeau (1749–1791), promou que sigui reclamat per a anar a París. El contracte que s'estableix perdurà malgrat els canvis de règim que s'esdevingueren a França. Alhora Prússia li concedeix una pensió que es va mantenir fins a l'any 1792.

Lagrange abandona Berlín el 18 de maig de 1787 i el 29 de juliol esdevé pensionista veterà de l'Académie de Sciences de Paris,⁸ de la qual era membre associat estranger des del 22 de maig de 1772.

És ben acollit pels erudits parisencs per l'ampli ventall de coneixements que té —metafísica, història, religió, lingüística, medicina, botànica, etc.— quelcom que respon a una regla de conducta que havia adoptat feia temps (vegeu [44, edició francesa, p. 325]):

Crec que, en general, un dels principis dels savis és mantenir un acord estricte amb les normes del país en tot allò que experimenta, fins i tot quan no són raonables [...].

Això no obstant, quan parla ho fa usant un to de dubte, i acostuma a començar l'explicació amb «no sé» (vegeu [16, p. 54]).

I, malgrat que mai no pren partit en els esdeveniments polítics de l'època —reialisme, Revolució, Imperi—, sembla talment que, en esperit, mostra una certa simpatia per la Revolució.

L'any 1792 demana la mà de Renée-François-Adélaïde Le Monnier (1767–1833), filla de l'astrònom Pierre-Charles Le Monnier (1715–1799), un col·lega

⁸ Se l'anomena Acadèmia de París.

de l'Académie. Es casen el 31 de maig. La diferència d'edat és de vint-i-cinc anys. El matrimoni tampoc no va tenir fills però, com el primer, és tranquil. Són anys políticament convulsos per a la monarquia, que signa el contracte de matrimoni el 3 de juny per indicar «com els n'és, de plaent, la unió». El 13 d'agost la família reial era empresonada a la Tour du Temple.

També són anys difícils per als científics: el 28 de març de 1794, Condorcet se suïcida i el 8 de maig Lavoisier és decapitat sota l'imperi de *la Terreur* (vegeu la nota 1).

Uns anys abans —el 8 de maig de 1790—⁹ l'Assemblée Nationale havia decretat la unificació de les mesures, quelcom que confià a l'Académie de Sciences. Malgrat la supressió de l'Académie, esdevinguda el 8 d'agost de 1793, la Comissió es manté. Lagrange en forma part, com a president, des de l'inici fins al final.

El 30 d'octubre de 1794, per decret, s'institueix l'École Normale, que té com a objectiu formar docents i uniformitzar l'ensenyament. Solament dura tres mesos i onze dies; en aquest període Lagrange —que té Laplace com a ajudant— hi ensenya matemàtica elemental.

Gràcies als esforços de Gaspard Monge, l'11 de març de 1794 es crea l'École Centrale des Travaux Publics que, seguidament, esdevé l'École Polytechnique —que encara avui perdura. Lagrange hi ensenya anàlisi matemàtica fins a l'any 1799, en què el succeeix Sylvestre-François Lacroix (1765–1843).

A partir del 1799 Lagrange forma part —amb Laplace, Monge, Claude Louis Berthollet (1748–1822) i Carnot, entre d'altres— d'un senat conservador creat per Bonaparte i que subsisteix durant l'Imperi. Rep aleshores moltes distincions, com ara l'Ordre de la Légion d'Honneur, el títol de Comte d'Empire (1808), i el nomenament de Grand Croix de l'Ordre Imperial de la Réunion (1813), creat per l'emperador el 1811.

Però Lagrange ja està molt malalt i espera, amb resignació, el moment de la mort, que s'esdevé el 10 d'abril. Tres dies més tard és enterrat al Panthéon, un monument dedicat als «Grandes Hommes» per «la Patrie reconnaissante». Els elogis fúnebres són llegits per Laplace, en nom del Senat, i per Bernard Germain Étienne de Lavoisier-sur-Ilion, comte de Lacépède (1756–1825), en nom de l'Académie. També a Itàlia se li reten homenatges públics, però no pas així a Berlín que, en aquells moments, es troba en plena insurrecció contra els francesos.



Tomba de Lagrange
Cripta del Panthéon
París

L'emperador fa comprar els treballs i manuscrits de l'insigne matemàtic —italià de naixença però francès d'adopció, qui en dubta?— i els confia, per a la seva salvaguarda, a l'Institut de France.

⁹ Vegeu <http://smdsi.quartier-rural.org/histoire/8mai70.htm>. Això no obstant, no s'instaurarà a França fins al 7 d'abril de 1795. Vegeu [98].

3 Notes sobre la producció científica

L'obra de Joseph-Louis Lagrange és molt diversa i extensa.¹⁰ Els àmbits d'estudi més importants els he concretat en ordre alfabètic, en la llista següent, i els he acompanyat d'una bibliografia *ad hoc*:

1. Àlgebra: [101], [80], [93].
2. Astronomia: [32], [81], [100].
3. Aritmètica o teoria de números: [95], [104], [36].
4. Càlcul de variacions: [97], [37].
5. Equacions diferencials: [2], [41].
6. Filosofia de l'anàlisi matemàtica: [20].
7. Mecànica: [72], [12], [13], [9].
8. Sèries: [91, capítol II, p. 140–159], [27].¹¹

L'article de Jean Itard [44] fa una presentació —força recomanable per la capacitat de síntesi d'aquest historiador francès de la matemàtica— de setanta-dos treballs de Lagrange, amb una descripció breu dels continguts i els situa en el seu lloc en la vida de l'insigne torinès.¹² En faré una selecció molt succinta: n'explicitaré el títol, el període en què el va realitzar ([T] per torinès, [B] per berlinès i [P] per parisenc) i la citació bibliogràfica corresponent.

3.1 Lagrange com a matemàtic aplicat

En la fase inicial de la seva producció Lagrange se'ns mostra com un *matemàtic aplicat* —resolució de problemes suggerits per la mecànica, l'astronomia, la gravitació, etc. Tanmateix, no oblida mai elaborar la teoria matemàtica que li cal per assolir l'objectiu que s'ha plantejat.

Primer treball. L'any 1754 fa imprimir una memòria en forma de carta, en italià, adreçada a Giulio Carlo di Fagnano (1682–1766) (vegeu [47]), on desenvolupa un càlcul formal que es fonamenta en l'analogia que hi ha entre el binomi de Newton i les diferències successives del producte de dues funcions, de la qual havia enviat una notícia a Euler abans de la publicació de la memòria.¹³ [T]

La corba tautòcrona. El 30 de setembre escriu una altra carta a Fagnano —que s'ha perdut—, en què estudia la *corba tautòcrona*.

Recordem que Galileo Galilei (1564–1642), en la carta adreçada a Guidoaldo del Monte (1545–1607) de 29 de novembre de 1602 [28] afirma que

10 La trobem recollida en els catorze volums ressenyats a [76]. Es pot consultar també [96].

11 Molts d'aquests ítems —amb més o menys detall i extensió— es poden trobar en llibres d'història de caire més general com ara [84, vol. III i IV], [11, vol. 4], [82, vol. IX], [46], [39] i [40]. Vegeu també [89].

12 Una descripció més humanitzada és la que s'ofereix a [16].

13 Un cop sortí publicat s'assabentà que el resultat es trobava ja en la correspondència entre Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) i Johann Bernoulli (1667–1748).

el període d'oscil·lació del pèndol depèn *només* de la longitud del pèndol, però, en canvi, *no depèn* ni de la massa ni de l'amplada. Aquesta afirmació serà analitzada per Christiaan Huygens (1629–1695) a l'*Horologium oscillatorium* (1673) [42], on demostra que cal que la corba que descrigui el pèndol sigui una *cicloide* —que és la corba de descens mínim o corba tautòcrona o isòcrona. Aquest resultat —mínim temps de caiguda— és el que agafa Jakob Bernoulli (1654–1705) en la seva solució del problema de la branquistòcrona, del qual parlarem més endavant a la pàgina 151 (vegeu [88, p. 66–68]).

Lagrange dedicà dos treballs més a l'estudi de la corba tautòcrona: el primer fou una comunicació a l'Acadèmia de Berlín el 4 de març de 1767 (vegeu [55]) en la qual feia servir idees incipients del càlcul de variacions. Fou criticat per l'acadèmic Alexis Fontaine des Bertins (1707–1771). Lagrange li va respondre amb l'article *Nouvelles réflexions sur les tautochrones*, publicat el 1770 (vegeu [60]). [B]

El càlcul de variacions. És, però, a partir de l'any 1755 —tenia dinou anys— quan Lagrange es preocupa del que, en un treball de 1766, Euler anomena *càlcul de variacions* (vegeu el títol de [25]). Diu: «És el primer fruit dels meus estudis».¹⁴

Les tècniques que va desenvolupar per al càlcul de variacions seran la base de la *Mécanique analytique*.

Les sèries recurrents i la probabilitat. L'any 1776 en una carta a Laplace —on indica que ha començat la traducció francesa de *The doctrine of chances* d'Abraham De Moivre (1667–1754) (vegeu [18]) que no pensa continuar i que es congratula que Laplace ho estigui fent— li esmenta que la memòria [50] era una introducció a la teoria de la probabilitat que, per manca de temps, no desenvoluparà. Lagrange recuperarà en els treballs [66], [49] i [65] la seva idea de l'ús de sèries recurrents per a la resolució de problemes plantejats per De Moivre. [T, B]

Sobre el so. També és en aquests anys quan Lagrange es preocupa de la teoria del so.¹⁵ En la primera de les obres que dedica a aquesta qüestió fa una declaració de principis que em sembla que val la pena de retenir (vegeu [50, p. 40]):

I la concordança dels meus resultats amb l'experiència servirà, potser, per destruir els prejudicis d'aquells a qui els desespera que la matemàtica no pugui aportar mai la llum vertadera a la física. És un dels principals objectius que m'he plantejat ara com ara. [T]

La llibració de la Lluna. L'any 1763 s'interessa per la llibració de la Lluna arran de la proposta del concurs per a l'any 1764 de l'Académie des Sciences:

¹⁴ Vegeu [57, p. 154]. Les aportacions de Lagrange es troben recollides a «Recherches sur la méthode de maximis et minimis» [48] i a «Sur la méthode des variations» [53]. Les tècniques emprades les sintetitza a [51].

¹⁵ Són els treballs que es recullen a [76, tom I, p. 39–148; 151–316; 319–332].

Com podem explicar la raó per la qual la Lluna presenta sempre la mateixa cara a la Terra; i de quina manera podem determinar per mitjà de les observacions i de la teoria, si l'eix d'aquest Planeta es troba subjecte a alguna mena de moviment propi que s'assembli al que coneixem de la Terra i que produeix la precessió i la nutació.

Per a estudiar aquest problema fa servir el *segon principi de les velocitats virtuals* que presenta un lligam íntim i necessari amb les tècniques del càlcul de variacions.¹⁶ [T, B]

El problema dels tres cossos. També es presenta al concurs de 1768 amb una memòria molt notable sobre la teoria dels tres cossos —Sol, Terra i Lluna. És una qüestió d'una gran profunditat i que obre tot un camp de recerca novell.¹⁷ Després ho generalitza a l'estudi dels sis cossos: Sol, Júpiter i les seves quatre llunes. Aquests estudis serien represos, vint-i-quatre anys més tard, per Laplace.

També en aquesta ocasió es basa en les lleis de la dinàmica: es limita a considerar, en l'aire, les partícules que es troben alineades i aleshores recorre al problema de les cordes que vibren, amb el qual els geòmetres no estaven pas d'acord; els mostra que els seus càlculs són deficients, i elabora una solució general.¹⁸ [B]

Estudis sobre la dinàmica dels fluids. En el decenni següent es preocupa pel comportament del moviment dels fluids; el primer treball, llegit a l'Académie el 22 de novembre de 1781, es publica l'any 1783 (vegeu [70]). [B]

3.2 Lagrange com a matemàtic pur

Ara, en canvi, ens trobem amb un Lagrange entès com a matemàtic pur —és a dir, planteja i resol problemes propis de la matemàtica en si mateixa que aprofundeixen en la naturalesa i el comportament dels seus objectes més preuats com ara els números enters, els polinomis, etc.

L'equació de Pell. Dedicava diversos treballs a demostrar l'existència de solució de l'equació de Pell, d'acord amb el nom que li atribuï Euler,¹⁹ $y^2 - Ax^2 = 1$, on x i $y \neq 0$ són enters positius i A no és un quadrat perfecte.²⁰ [B]

16 Vegeu [52]. Aquest treball serà millorat de manera sensible en un treball ulterior de 1780: [67].

17 Vegeu [62]. Aquests treballs el porten, d'una manera natural, a l'estudi de les pertorbacions i a la teoria del potencial que desenvolupà durant els anys setanta del segle XVIII. També val la pena indicar que tracta de manera explícita el concepte de *determinant*; vegeu [46, vol. II, p. 800] o [40, p. 320-322].

18 Cal remarcar la idea que tingué d'invertir el sumatori i la integral i que el portaren de manera inconscient als *coeficients de Fourier*. Vegeu [46, vol. II, p. 510-511].

19 El 1738 —vegeu [22]— Euler parla d'un problema aritmètic, però, en canvi, el 1759 parla ja del problema de Pell —vegeu [24]. Per a més informació, vegeu la nota 31.

20 Vegeu [55], publicat el 1769. A les notes que acompanyen el *Vollständige Anleitung zur Algebra* d'Euler —vegeu [63]— ofereix una demostració molt més simplificada.

Un problema aritmètic. Ofereix la primera demostració completa del teorema de Bachet: *Tot número natural és la suma de quatre quadrats enters*. Es basa en les demostracions inacabades d'Euler.²¹ [B]

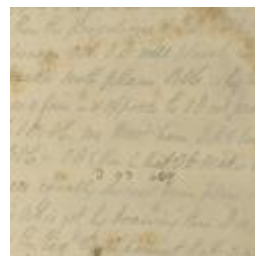
El teorema de Wilson. El 13 de juny de 1771 llegeix a l'Acadèmia de Berlín una demostració molt original del teorema de Wilson: *Si p és un número primer, $(p - 1)! + 1$ és múltiple de p* (vegeu [61]). [B]

La resolució de les equacions algèbriques. Una de les qüestions de la matemàtica que preocupava des de feia temps era el comportament de les equacions polinòmiques. L'any 1770, Lagrange fa una aportació notable en la memòria extensa «Réflexions sur la résolution algébrique des équations» on analitza en profunditat els algorismes de resolució d'equacions polinòmiques subministrats pels matemàtics que l'han precedit en la qüestió (vegeu [59]).

Aquesta memòria notable la completa una altra memòria [75] que proporciona mètodes per a determinar arrels aproximades de les equacions polinòmiques, i en la qual analitza el treball de D'Alembert relatiu al *teorema fonamental de l'àlgebra* i on reconeix la validesa de la demostració de D'Alembert amb les paraules següents: «Aquesta demostració és molt enginyosa i, al meu parer, no deixa res a desitjar pel que fa a l'exactitud» (vegeu [15] i [64, p. 479]); i que conté també la llei d'interpolació —avui coneguda amb el nom de *llei d'interpolació de Lagrange*— que trobem a les lliçons que donà a l'École Normale l'any 1795, si bé ja havia estat indicada per Edward Waring (1734-1798) l'any 1779 i Euler, el 1783 (vegeu [73] i [103]. I, per a més informació, [83]). [B, P]

Cloc aquesta síntesi breu amb dos tractats alhora metodològics i epistemològics:

La mecànica analítica. Lagrange la presenta com una manera nova de resoldre problemes de la mecànica dels cossos, tant si són sòlids com si són fluids, basant-se per a tots ells en els mateixos principis. Així, als vint-i-tres anys havia cop-sat ja els fonaments de les seves grans obres, obres que serien admirades per tots els erudits de l'època (vegeu [16, p. 20]). Els principis en què es basa són *principis de minimalització*. [T, B, P]



*Mécanique
analytique* (1788)
Pàgina manuscrita

La teoria de les funcions analítiques. És un tractat d'índole epistemològica on Lagrange fa una presentació clara i rigorosa —i alhora parcial— del càlcul diferencial (vegeu [74]). [P]

²¹ Vegeu [58], aparegut l'any 1772.

4 Alguns resultats matemàtics explicitats

Em sembla que aquest *in memoriam* a Lagrange seria coix si no digués quelcom d'algunes de les seves aportacions matemàtiques; dedico, doncs, aquesta secció a fer un repàs breu d'algunes d'aquestes aportacions. En aquest repàs, tanmateix, no aprofundeixo en les qüestions de què tracto —suposo que el lector en té ja un cert coneixement—; solament em fixo en alguns detalls històrics i en d'altres de relatius a l'originalitat de l'obra de Lagrange.

4.1 Àlgebra

L'objectiu del treball de Lagrange de 1770, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* [59], és trobar, a partir de l'anàlisi —la reflexió— dels mètodes de resolució de la cúbica i la quàrtica generals assolits pels matemàtics que l'han precedit en l'estudi del problema, un camí per a poder resoldre la *quintica general* que sigui de la naturalesa fins aleshores assolida, és a dir, *per radicals*.

Recordem que, el mateix any, Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) establí: *Tota equació $X^p - 1 = 0$, amb p primer, és resoluble per radicals*. Ho establí, però, solament per als casos $p = 2, 3, 5, 7$ i 11 . La demostració general la donaria Carl Friedrich Gauss (1777–1855), a les *Disquisitiones arithmeticae* (1801) [31] (vegeu-ne la traducció catalana de Griselda Pascual, [86]).

Entenem per *equació polinòmica general* una equació en la qual els coeficients són «paràmetres» —és a dir, totalment generals. En concret, són equacions de la forma

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = 0, \quad a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}.^{22} \quad (1)$$

Els lligams estructurals de les arrels de (1) són sempre funcions simètriques i, de retruc, són expressables com a funcions racionals dels coeficients de l'equació inicial que, en principi, són elements genèrics de $\mathbb{Q}$ (respectivament, de K), via les *fórmules de Cardano-Viète* i del *teorema fonamental de les funcions simètriques*.²³ Aquesta anàlisi el porta a establir una definició i dos teoremes bàsics que constitueixen l'inici d'un canvi de paradigma respecte dels algebristes que l'havien precedit, com palesen els exemples que segueixen els enunciats següents (vegeu [59, § 100, p. 374–379]):

DEFINICIÓ. Diem que la funció racional $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, funció de les arrels $x_1, \dots, x_n$ de (1), admet totes les permutacions de la funció racional $\psi(x_1, \dots, x_n)$ si, i només si, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ és invariant per tota permutació que deixa invariant $\psi(x_1, \dots, x_n)$.²⁴

²² El cos podria ser més general; en tot cas, els coeficients són genèrics en el cos en qüestió.

²³ Aquest teorema fou intuït per Albert Girard (1595–1632) [35], aprofundit per Isaac Newton [85, p. 102] i demostrat per Edward Waring [102, p. 76]. Lagrange el considera «autoevident» [59, p. 372].

²⁴ Lagrange les anomena *funcions semblants* i suposa que són funcions racionals. Vegeu [59, § 88, p. 350–351].

TEOREMA I. *Si una funció racional de les arrels de (1), $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, admet totes les permutacions d'una altra funció $\psi(x_1, \dots, x_n)$ (i, potser, d'altres), aleshores la funció φ es pot expressar com una funció racional de ψ els coeficients de la qual són funcions racionals dels de l'equació general.*

Un exemple senzill ajudarà a copsar el significat del teorema. Considerem l'equació quadràtica general $aX^2 + bX + c = 0$ de la qual suposem que les arrels són x_1, x_2 . La funció *projecció primera* $\pi_2^1(x_1, x_2) := x_1$ admet les mateixes permutacions de les variables x_1, x_2 que la funció $t(x_1, x_2) := x_1 - x_2$: solament la identitat. Per tant, $x_1 = \frac{1}{2}(-\frac{b}{a} + t(x_1, x_2))$.

Recordem, de passada, que el *discriminant* de l'equació de segon grau anterior és $\Delta := a^2(x_1 - x_2)^2 = a^2(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) = ((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2) = a^2\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}\right) = b^2 - 4ac$. Per tant, $t(x_1, x_2) := \sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac}$, i recuperem l'expressió ben coneguda de resolució de l'equació de segon grau general $x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{\Delta} = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$. El càlcul de x_2 és ara elemental, ja que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, i dóna $x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{\Delta} = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$.

TEOREMA II. *Si una funció racional de les arrels de (1), $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, no admet totes les permutacions d'una altra funció racional $\psi(x_1, \dots, x_n)$, sinó que pren r valors diferents, aleshores la funció φ és arrel d'una equació de grau r els coeficients de la qual són funcions racionals de ψ i dels coeficients de l'equació general [59, § 103, p. 382-387].*

Com a exemple d'aplicació del teorema anterior, considerem l'equació general de tercer grau $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ i les funcions de les seves arrels $\varphi = x_1$ i $\psi = x_1x_2$. Les permutacions que deixen fixa ψ són la identitat i la que intercanvia x_1 i x_2 . Per aquestes permutacions φ pren dos valors: x_1 i x_2 . Aleshores φ és arrel de l'equació de segon grau $(Y - x_1)(Y - x_2) = Y^2 - (x_1 + x_2)Y + x_1x_2 = 0$. El terme independent del polinomi és ψ i el coeficient de grau 1 és

$$-(x_1 + x_2) = -(x_1 + x_2 + x_3 - x_3) = -\left(a_2 - \frac{x_1x_2x_3}{x_1x_2}\right) = -a_2 + \frac{-a_0}{\psi}.$$

Entre les funcions de les arrels, Lagrange introdueix les anomenades *resolvents primeres*, definides com:

$$\rho = x_1 + \xi x_2 + \xi^2 x_3 + \dots + \xi^{n-1} x_n,$$

on $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$ són les n arrels enèsimes de la unitat, que s'utilitzen, per exemple, en la resolució de la cúbica com veurem a continuació.

Procediment de Lagrange. Volem resoldre l'equació general (1). Comencem amb una funció simètrica de les arrels com ara $\varphi_0 := x_1 + \dots + x_n$. És invariant per a les $n!$ permutacions de les arrels $x_1, \dots, x_n$.

Segui ara $\varphi_1(x_1, \dots, x_n)$ una funció que pren r valors quan sotmetem les variables $x_1, \dots, x_n$ a les permutacions $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Aleshores, pel teorema II, φ_1 serà arrel d'una equació de grau r , $g_1(Y) = 0$, els coeficients de la qual seran funcions racionals de φ_0 i dels coeficients de l'equació general.

Sigui ara $\varphi_2(x_1, \dots, x_n)$ una funció que pren s valors quan sotmetem les variables $x_1, \dots, x_n$ a les permutacions $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ que deixin invariant $\varphi_1(x_1, \dots, x_n)$. Serà l'arrel d'una equació de grau s , $g_2(Y) = 0$, amb coeficients en el cos de funcions racionals de φ_1 i els coeficients de l'equació general.

Obtenim una successió $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, fins que arribem a x_1 (que només admet la identitat). Són arrels d'equacions $g_1(Y) = 0$, $g_2(Y) = 0$, $g_3(Y) = 0, \dots$, de graus $r, s, t, \dots$. Aquestes equacions són les *resolvents de Lagrange* de l'equació (1).

Si cada una de les equacions $g_1(Y) = 0$, $g_2(Y) = 0$, $g_3(Y) = 0, \dots$, és resoluble per radicals, l'equació general (1) serà resoluble per radicals.

Vegem ara el mètode anterior aplicat a la cúbica. Considerem la funció —el cub de la resolvent primera— $\varphi(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + \xi x_2 + \xi^2 x_3)^3$, on $\xi^3 = 1$, associada a la cúbica general $X^3 + pX + q = 0$. Pren dos valors A i B quan sotmetem les arrels x_1, x_2, x_3 a les substitucions possibles de $\mathfrak{S}_3$ que deixin fix $s(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + x_3$. Per tant són les arrels d'una equació de segon grau —en concret de l'equació $Z^2 + 27qZ - 27p^3 = 0$ — i, per tant, resoluble per radicals.²⁵ A més tenim

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\x_1 + \xi x_2 + \xi^2 x_3 &= \sqrt[3]{A}, \\x_1 + \xi^2 x_2 + \xi x_3 &= \sqrt[3]{B}.\end{aligned}$$

Sumem i obtenim $x_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$. Les altres arrels s'obtenen anàlogament. L'hem resolt per radicals —quelcom que ja havia aconseguit el 1535 Niccolò Fontana, (1499-1557), dit *Tartaglia* (el Quec). La resolució de la quàrtica la tracta de manera anàloga.

Aleshores, ple d'esperança, aplica el mètode a la quintica i es troba que la resolvent és una sèxtica —per tant més complexa de resoldre que la que es proposava inicialment.²⁶

Serà, doncs, impossible resoldre la quintica per radicals? Gauss així ho afirma taxativament el 1801. Aquesta anàlisi —que hom podria pensar que és fallida— obre la porta a les recerques de Paolo Ruffini (1765-1822) [94], Niels Herik Abel (1802-1829) [1] i Évariste Galois (1811-1832) [30]. En particular, Ruffini estableix que *quan $n > 4$, no hi ha cap funció de les arrels que prengui 3 o 4 valors* [94, vol. 2, p. 162-170] i d'aquí en dedueix la *impossibilitat* de resoldre la quintica general. Però, per a justificar-ho, recorre al fet següent (supòsit de Ruffini): *Si una equació és resoluble per radicals, les expressions de*

²⁵ És un exercici veure que $A + B = -27q$ i $A \cdot B = -27p^3$.

²⁶ Vegeu [59, § 74, p 342]. Diu: «Mais nous n'entrerons point ici dans ce détail qui, outre qu'il exigerait des calculs très-longes, ne saurait d'ailleurs jeter aucune lumière sur la résolution des équations de cinquième degré; car comme la réduite en z est de sixième degré, elle ne sera pas résoluble à moins qu'elle ne puisse s'assabaiser à un degré inférieur au cinquième»: [«No ens estendrem en els detalls que, a banda d'exigir càlculs massa llargs, tampoc no ens aportarien llum a la resolució de la quintica; atès que la reduïda en z és de grau sisè, no serà pas resoluble, llevat que puguem abaixar-li per dessota del grau cinquè»].

les arrels es poden expressar per mitjà de radicals que són funcions racionals de les arrels amb coeficients en el cos dels coeficients de l'equació inicial que cal resoldre i de les arrels complexes de la unitat corresponents [94, p. 11]. Aquest resultat l'establiria, però, Abel en la seva demostració de la impossibilitat de resolució de la quintica general. Per a consultar el treball de Ruffini, vegeu [93, capítol VIII]; per al d'Abel, [87], i per al de Galois, [90].

4.1.1 El teorema de Lagrange de la teoria de grups. Val a dir que, en aquest context, li cal que el conjunt de les permutacions de les arrels es trenqui de manera adequada (vegeu [92, cinquena edició, p. 207-209]).

Aquest resultat el va establir Lagrange quan encara no s'havia introduït el concepte de *grup*, originari de Galois. Utilitzant ara aquesta noció el resultat de Lagrange és el següent:

TEOREMA DE LAGRANGE DE LA TEORIA DE GRUPS. *Si H és un subgrup d'un grup G —tots són grups de permutacions d'arrels—, aleshores l'ordre del subgrup H —el nombre d'elements— divideix l'ordre del grup G .*

4.2 Aritmètica o teoria de números

En aquest àmbit Lagrange fa tres aportacions que es recullen als llibres d'història de la matemàtica: la demostració de la fórmula de Wilson, la solució del problema de Bachet i la resolució de l'equació de Pell. Comentarem aquí la primera i l'última.

4.2.1 La fórmula de Wilson. Aquesta fórmula ja era coneguda pels matemàtics indis i en trobem la primera petjada en Bhāskara I (~600-~680); la retrobem en Ibn al-Haytham (~1000). A Occident,²⁷ l'enuncia Edward Waring l'any 1770, que l'atribueix al seu deixeble, John Wilson (1741-1793); cap dels dos, emperò, no la demostra.²⁸

TEOREMA DE WILSON. *Si p és un número primer, $(p - 1)! + 1$ és múltiple de p .*

L'any 1771, Lagrange n'ofereix una demostració realment simple (vegeu [61]). Tot consisteix a considerar el polinomi

$$(x + 1)(x + 2) \cdots (x + p - 1) = x^{p-1} + A_1 x^{p-2} + \cdots + A_{p-1},$$

²⁷ Hi ha constància que, un segle abans, ja l'havia intuït Leibniz [99, p. 114] però mai no la va publicar. Diu: «Productus continuorum usque ad numerum qui anteprecedit datum divisus per datum relinquit 1 (vel complementum ad unum?) si datus sit primitivus. Si datus sit derivativus relinquet numerum qui cum dato habeat communem mensuram unitate majorem» (El producte de tots els enters que precedeixen un enter donat, quan es divideix per aquest enter, dona 1 si el número enter és primer. Si és compost, dona un número que té un factor comú major que 1 amb l'enter donat).

²⁸ Vegeu [102, p. 218, i com a problema 5, en l'edició de 1782, p. 380] d'Edward Waring. En l'esmentada pàgina de la tercera lliçó, hi llegim: «Hanc maxime elegantem primorum numerorum proprietatem invenit vir clarissimus, rerumque mathematicarum peritissimus Joannes Wilson Armiger» (Un personatge il·lustre i molt expert en matemàtiques, John Wilson, trobà aquesta propietat elegant dels números primers).

a substituir x per $x + 1$ i a multiplicar-ho tot per $x + 1$. Comparant els coeficients en resulta que $k A_k$, amb $1 \leq k \leq p - 2$, i, per tant, cada A_k , amb $1 \leq k \leq p - 2$ és múltiple de p i, a més, $(p - 1) A_{p-1} = 1 + A_1 + \dots + A_{p-2}$. D'on trivialment $A_{p-1} + 1$ és múltiple de p ; però $A_{p-1} = (p - 1)!$

D'aquest resultat en dedueix el *teorema petit de Fermat* i finalment demostra el recíproc del teorema de Wilson (breument i clara exposat a [19, vol. I, p. 62-63]).

Tanmateix, Lagrange ofereix un teorema més general —que és el que val la pena d'indicar—, avui conegut, com tants d'altres, amb el nom de *teorema de Lagrange*.²⁹ Diu:

TEOREMA DE LAGRANGE. *Sigui p un número primer i*

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0,$$

amb $a_k \in \mathbb{Z}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), $n > 1$ i $a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$. Llavors la congruència

$$f(X) \equiv 0 \pmod{p}$$

*té, com a màxim, n arrels diferents mòdul p .*³⁰

I, si bé Lagrange no en dedueix el teorema de Wilson, és possible fer-ho (vegeu [10, p. 102-104]).

4.2.2 La resolució de l'equació de Pell. Es tracta d'estudiar l'equació diofàntica, coneguda amb el nom d'*equació de Pell*:³¹

$$x^2 - A y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Z}, \text{ i } A \in \mathbb{N}, \text{ no quadrat perfecte.} \quad (2)$$

Euler s'havia adonat del fet següent:

LEMA D'EULER. *Si p, q és una solució positiva de $x^2 - A y^2 = 1$, aleshores $\frac{p}{q}$ és una convergent del desenvolupament de $\sqrt{A}$ en fracció contínua [24, p. 32].*

S'adonà també del lema:

²⁹ Vegeu [56, p. 667-669]. Fa la demostració —que és vàlida en general— en un cas concret.

³⁰ Està enunciat en el llenguatge de Gauss, que l'estableix a [31, § 43, edició catalana, p. 40-41].

³¹ Com ja he dit a la nota 19, el nom fou erròniament atribuït a John Pell per Euler, que potser el va confondre amb el matemàtic anglès Lord Brouncker (1620-1684), que fou el primer matemàtic europeu que intentà de trobar una solució general. Tot comença amb un problema que l'any 1657 Pierre de Fermat planteja a John Wallis (1616-1703), el matemàtic anglès més notable de l'època.

Ja havia estat estudiat profusament pels matemàtics indis, però Occident no en tindria coneixement fins passats uns cent-cinquanta anys quan Lagrange en trobà la solució general. L'any 628, Brahmagupta (598-668) en *Brahma Sphuta Siddhanta* desenvolupà el *mètode chakravala*. Aquest text fou traduït pels àrabs l'any 773 i traduït al llatí a començaments del segle XII. Aquest mateix segle Bhāskara II (1114-1185) i Narayana Pandit (~1340-~1400) en el XIV assoliren la determinació de la solució general. Recordem, de passada, que el problema famós dels bous d'Arquimedes porta a la resolució d'una equació de Pell, la solució de la qual va haver d'esperar a disposar d'ordinadors.

Una història excel·lent de l'equació de Pell és [105] i un text teòric plantejat en forma de problemes és [4].

LEMA. Si $\frac{p}{q}$ és una convergent del desenvolupament de $\sqrt{A}$ en fracció contínua, existeix un enter k amb $|k| < 1 + 2\sqrt{A}$ tal que $p^2 - Aq^2 = k$.

Tanmateix, no fou capaç de veure que aquest mètode sempre dona solucions i que *totes* les solucions són convergents de $\sqrt{A}$. És Lagrange qui estableix el resultat següent (vegeu [54, p. 672, 678 i 686]):

TEOREMA DE LAGRANGE. *L'equació (2) sempre admet solucions enteres.*³²

I analitzant el comportament del desenvolupament en fracció contínua de $\sqrt{A}$, també proporciona una *infinitat* de parelles (p, q) per a les quals $f(x, y) = x^2 - Ay^2$ pren un mateix valor R (vegeu [54, § 28, p. 727]).

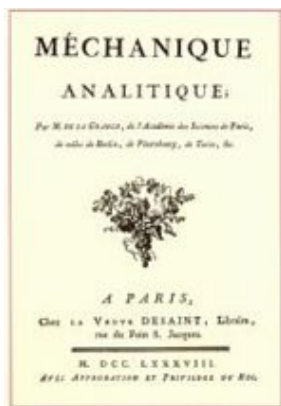
A més, estableix un algorisme força simple per a determinar *totes* les solucions de l'equació (2).

ALGORISME DE LAGRANGE. Si p_1, q_1 és la solució positiva mínima de (2), aleshores qualsevol altra solució p, q de (2) és una parella determinada p_n, q_n obtinguda de la identitat:³³

$$p_n + q_n \sqrt{A} = (p_1 + q_1 \sqrt{A})^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

4.3 El càlcul de variacions

A la història de la matemàtica, abans de l'aparició del càlcul diferencial, la preocupació per les qüestions relatives a la maximització i la minimització de magnituds ha estat molt esparsa. No és estrany, en mancava l'eina. Això no obstant, era possible, com féu Zenodor (~200 aC--~140 aC), plantejar des de la geometria *problemes isoperimètrics*.



Portada de *Mécanique analytique* (1788)

Molts dels enunciats de Zenodor els coneixem gràcies a un comentari que Teó d'Alexandria (~335--~405) féu a l'*Almagest* de Ptolemeu (~90--~168). Euclides usaria —mode geomètric— el *camí mínim* per donar la llei de la *reflexió de la llum*.

Un altre àmbit —que trigaria segles a plantejar-se— en el qual apareixen problemes d'optimització és el que proporciona la física. Per exemple, Pierre de Fermat recorreria al *temps mínim* i al seu mètode de màxims i mínims per a establir la llei de la *refracció de la llum* (vegeu [26, p. 183–199]). Leibniz s'adonaria que el llenguatge del *càlcul diferencial* que acabava d'introduir en l'article de 1684 [17, traducció castellana de Javier de Lorenzo, p. 271–281] era el llenguatge idoni per a tractar aquesta mena de problemes.

³² Vegeu [54, § 15, p. 693]. Tanmateix, aconsello, per la simplificació assolida que es basa en la periodicitat del desenvolupament en fracció contínua de $\sqrt{A}$, [63, § 37, capítol iv, p. 743 i següents].

³³ Vegeu [54, § 15, p. 695 i § 17, p. 698–703].

També Isaac Newton, a l'escoli de la proposició 34 del llibre II de la tercera edició del *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (1687), plantejaria una qüestió d'indole física —la forma que havia de tenir un sòlid de revolució per a presentar mínima resistència a un fluid en el qual es desplaçava— que comporta determinar una funció que minimitzi una integral.

La consciència de la importància d'aquesta mena de problemes —problemes de maximització/minimització d'integrals— té l'origen l'any 1696 quan el jove dels germans Bernoulli, Johann, plantejà el que avui es coneix com el *problema de la braquistòcrons* (vegeu [7, vol. I, p. 161]): Quina és la corba que ha de seguir un punt que cau lliurement d'un punt a un altre si volem que el temps sigui mínim.

Quatre dels matemàtics més rellevants del moment —Newton, Leibniz, el germà gran de Johann Bernoulli, Jakob (vegeu [17, p. 391]), i el marquès de L'Hôpital (1661–1704)— n'oferiren la solució al costat de la de Johann. Les cinc solucions es van publicar a l'*Acta Eruditorum* de l'any 1697.

La solució de Jakob Bernoulli suggerí a Leonhard Euler un mètode general: el que avui coneixem com el *càlcul de variacions*. De fet, Euler *alterava* una ordenada —l'afectava d'una *variació*. Amb aquest mètode i una gran imaginació d'indole geomètrica, veu de quina manera aquesta variació afecta les derivades y' , y'' , ... i la integral J definida a la fórmula (4). Euler, a [23] (vegeu també [17, p. 399–406]), sintetitza treballs anteriors i estableix, en llenguatge actual, el resultat següent (vegeu [21, p. 178]):



Estàtua de Lagrange
Via Lagrange
Torí

TEOREMA D'EULER. *Considerem una integral de la forma*

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx, \text{ on } y' = \frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

Llavors, la funció $y = y(x)$ que minimitza o maximitza el valor de J ha de satisfer l'equació diferencial

$$f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = 0.^{34} \quad (5)$$

³⁴ L'integrand $f(x, y, y')$ depèn funcionalment de x , y , y' , i també en depenen f_y i $f_{y'}$. D'aquesta manera cal entendre (5). Recordem que $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_{y'} = \frac{\partial f}{\partial y'}$.

És fàcil de constatar que l'equació diferencial (5) és equivalent a

$$f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y' - f_{y'y'}y'' = 0.^{35} \quad (6)$$

Atès que la funció f és coneguda ens trobem davant d'una equació diferencial ordinària de segon ordre, en $y(x)$, no lineal.

Precisament l'any en què apareix el *Methodus inveniendi*, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, arran de les seves recerques sobre la teoria de la llum, publicava el *principi de mínima acció*; podem reformular-lo dient que *les lleis de la naturalesa s'atenen al principi d'economia*. Euler, que mantenia correspondència amb Maupertuis, reformularia aquest principi, en un apèndix del text esmentat, com un teorema dinàmic i l'inclouria dins el càlcul variacional.

Lagrange, sempre amatent a l'obra d'Euler, començaria a preocupar-se pel càlcul de variacions el 1750. Tenia dinou anys. La seva aportació fou la de descartar la tècnica basada en la geometria, introduïda per Bernoulli i Euler, i sotmetre la teoria a mètodes analítics. En la secció següent veurem com preocupava a Lagrange aconseguir un mètode analític que garantís el rigor de l'anàlisi.

La idea de Lagrange, a diferència de la d'Euler, era cercar directament una funció $y(x)$ dins una família de funcions que passen pels dos punts (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ;³⁶ en concret, considera les funcions de la forma $y(x) + \delta y(x)$, on δ —un símbol introduït per Lagrange— indicava la variació entera de $y(x)$.

En introduir aquesta nova funció dins de l'integrand de J ,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx,$$

la integral es veia alterada i es podia determinar l'increment ΔJ :

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} \{f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y')\} dx.$$

Malgrat que la funció $f(x, y, y')$ depèn de tres variables —que Lagrange mira com a independents—, atès que la x no varia, pot desenvolupar l'integrand de ΔJ en sèrie de Taylor de dues variables. S'obtenen, d'antuvi, termes en δy i $\delta y'$, després termes de segon grau en aquests increments, etc., de manera que:

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2} \delta^2 J + \frac{1}{3!} \delta^3 J + \dots,$$

³⁵ Recordem que $f_{y'x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x}$, $f_{y'y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}$, $f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y}$.

³⁶ El seu treball més notable en aquest tema fou [51]. Recordem que, cinc anys abans, en una carta a Euler, havia batejat aquest mètode amb el nom de *mètode de variacions* però Euler l'any 1756 el rebatejaria amb el nom actual: *càlcul de variacions*.

on

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{x_1}^{x_2} (f_y \delta y + f_{y'} \delta y') dx \\ \delta^2 J &= \int_{x_1}^{x_2} (f_{yy} (\delta y)^2 + f_{yy'} (\delta y) (\delta y') + f_{y'y'} (\delta y')^2) dx, \\ &\vdots\end{aligned}\tag{7}$$

Així obté les variacions successives de J : δJ , $\delta^2 J$, etc.

Aleshores Lagrange afirma que, si $y(x)$ proporciona un extrem, llavors $\delta J = 0$ i afegeix, sense explicitar-ne la raó, que d i δ commuten:³⁷

$$\delta y' = \frac{d(\delta y)}{dx}.$$

I substituint-ho a (7) obté:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ f_y \delta y + f_{y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right\} dx$$

que, integrant per parts i usant el fet que δy s'anul·la entre x_1 i x_2 , dóna:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ f_y \delta y - \left(\frac{d}{dx} f_{y'} \right) \delta y \right\} dx.$$

I, atès que $\delta J = 0$ per a cada variació δy , Lagrange conclou que el coeficient de δy ha de ser 0 i que, per tant, s'obté l'equació d'Euler:

$$f_y - \frac{d}{dx} (f_{y'}) = 0.$$

Heus ací un diàleg fructífer entre Lagrange i Euler que permet un canvi de perspectiva en les aportacions del jove matemàtic italofrancès.

4.4 La mínima acció en la mecànica

La quantitat A , coneguda com l'*acció*, es defineix per

$$A = \int L dt,$$

on L s'anomena actualment el *lagrangiana*.³⁸ El lagrangiana més simple d'un sistema és l'energia cinètica T menys l'energia potencial V :

$$L(x, t) = T(x, t) - V(x, t).$$

³⁷ Això ho aclariria Euler més endavant.

³⁸ Les idees d'aquesta obra magna són les que ja havia aplicat abans el 1764; vegeu [52, p. 9].

Si fem que l'acció sigui mínima, obtindrem l'*equació d'Euler-Lagrange*.³⁹

En efecte, considerem un camí extremal $x(t)$ entre els punts fixos $x(t_0)$ i $x(t_1)$, i un moviment al llarg del camí. La trajectòria és expressada per la funció $a(t)$, i la velocitat $v(t)$ canvia d'acord amb:

$$x(t) \rightarrow x(t) + a(t), \quad v(t) \rightarrow v(t) + \dot{a}(t).$$

Si prenem $a(t)$ molt petit però de manera que $x(t) + a(t)$ passi pels punts fixos $x(t_0)$ i $x(t_1)$, podem afirmar que $a(t_0) = a(t_1) = 0$.

Tot això afecta el lagrangiana. Per a aproximacions de primer ordre de l'element petit $a(t)$, el lagrangiana es transforma de la manera següent:

$$L(x, v) \rightarrow L(x + a, v + \dot{a}) = L(x, v) + a(t) \frac{\partial L}{\partial x} + \dot{a}(t) \frac{\partial L}{\partial v}.$$

Per tant, l'acció es transforma d'acord amb $A \rightarrow A + \delta A$, on:

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(a(t) \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{da}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} \right).$$

El segon terme que hi ha dins el parèntesi es pot integrar per parts:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{da}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \left[a(t) \frac{\partial L}{\partial v} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt a(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}.$$

Atès que $a(t_0) = a(t_1) = 0$, la part ja integrada (entre claudàtors) s'anulla. En resulta que δA val:

$$\delta A = \int dt a(t) \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} \right).$$

Per a $a(t)$ arbitrari, per a minimitzar l'acció (és a dir, si fem $\delta A = 0$), l'expressió que hi ha dins dels parèntesis ha de ser zero. Si ho reescrivim en coordenades generalitzades q , en lloc de x , i $\dot{q}$, en lloc de v , obtenim:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0,$$

que és l'equació d'Euler-Lagrange (vegeu [72, p. 332, 340]).

4.5 Els multiplicadors de Lagrange

A la pàgina 77 del volum 11 de les *Oeuvres* de Lagrange —el volum que conté el tom primer de la *Méchanique analytique*— hi llegim (vegeu [72, p. 77-78]):

³⁹ Aquesta idea s'usa profusament en mecànica quàntica i en física de les partícules, en particular quan es tracta amb *teories gauge*.

§ 1.— *Mètode dels multiplicadors.*

2. Siguin

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \dots$$

les diferents equacions de les condicions que imposa la naturalesa del sistema, on les quantitats $L, M, N, \dots$, són funcions finites de les variables $x, y, z, s', y', z', \dots$; si les diferenciem, obtenim

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \dots,$$

que proporcionen la relació que hi ha d'haver entre les diferencials d'aquestes variables. En general, les usarem com a equacions de condició entre aquestes diferencials [...].

Ara, atès que aquestes equacions només les necessitem per a eliminar un nombre semblant de diferencials en la fórmula general de l'equilibri, segons la qual cada un dels coeficients de les diferencials restants ha de ser nul, no és difícil provar, per mitjà de l'eliminació de les equacions lineals, que s'obtidran els mateixos resultats si s'afegeixen a l'equació que s'estudia les diferents equacions de condició $dL = 0, dM = 0, dN = 0, \dots$, cada una multiplicada per un coeficient indeterminat; seguidament, s'igual a zero la suma de tots els termes que es troben multiplicats per una mateixa diferencial. Això donarà tantes equacions particulars com diferencials; aleshores hom elimina d'aquestes darreres equacions els coeficients indeterminats amb els quals hem multiplicat les equacions de condició.

3. En resulta aquesta regla extremament simple per a trobar les condicions d'equilibri del sistema arbitrari que se'ns proposi [...]

Com veiem, Lagrange dóna el *mètode dels multiplicadors* com una eina en un text que té com a objecte d'estudi determinats resultats de la física.

En llenguatge actual, es tracta de trobar un màxim (o mínim) local de la funció $f(x, y)$ quan està sotmesa a la condició $g(x, y) = 0$. Si designem el conjunt de nivell de g per $A = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$, es tracta de trobar un punt (x_0, y_0) per al qual $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per a tot $(x, y) \in A$.

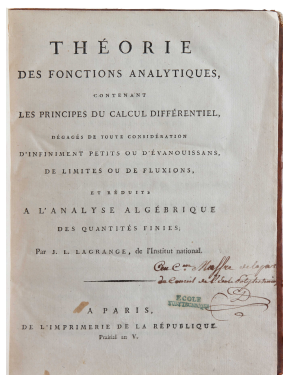
Lagrange observa que el gradient de $f(x_0, y_0)$ — $\text{grad } f(x_0, y_0)$ —⁴⁰ és ortogonal al vector tangent $(x'(t_0), y'(t_0))$ de la corba de nivell A (vegeu [72, p. 78] i [41, p. 325–326]). Per tant, en l'extrem local, els vectors $\text{grad } f(x, y)$ i $\text{grad } g(x, y)$ tenen la mateixa direcció, i això porta a la condició necessària

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } g(x, y), \quad g(x, y) = 0$$

(si $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq 0$). El paràmetre λ és el que anomenem *multiplicador de Lagrange*. Les equacions anteriors representen tres condicions per als paràmetres x, y, λ . Si introduïm la funció $\mathcal{L}(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$, les tres condicions anteriors es poden substituir per $\text{grad } \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$.

40 Recordem que $\text{grad } f$ és el vector $\text{grad } f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})f = \nabla f$, on ∇ s'anomena *nabla* i prové d'una arpa assíria. Vegeu [33, p. 138].

4.6 La teoria de les funcions analítiques



Portada⁴¹ de *Théorie des fonctions analitiques*

El càlcul diferencial plantejava una munió de problemes de caire epistemològic i també metodològic, com van posar de manifest a bastament els seus detractors, el més paradigmàtic dels quals fou George Berkeley (1685–1753), que a *The Analyst, or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* —l'astrònom Edmond Halley— feia veure l'anomalia que suposava treure conclusions que volen ser rigoroses a partir d'inconsistències lògiques i conceptes ambigus.

D'altra banda, la resolució del problema de la corda vibrant —que portava a la resolució d'una equació diferencial en derivades parcials de segon ordre— obria una esclatxa, gens trivial, als conceptes de *funció* i de *continuitat*.

Calia, doncs, d'alguna manera establir una teoria de funcions prou coherent i sòlida per tal de poder, si més no, paliar aquests problemes que, encara que ningú no n'era conscient, portarien molts maldecaps i contribuirien a la crisi de fonaments de finals del segle XIX (vegeu, per exemple, [8]).

Això és el que intentà fer Lagrange en la seva *Théorie des Fonctions Analytiques* (1797).⁴² Volia fer una presentació completa del càlcul que evités tota referència als infinetsimals, als diferencials i als límits.

L'aproximació lagrangiana es basava a considerar el desenvolupament en sèrie de potències d'una funció $f(x)$. D'aquesta manera creia que podria oferir una mena de càlcul de tipus algebraic de la teoria de funcions, atès que, si substituïa x per $x + i$, obtenia l'expressió —de caire polinòmic infinit—

$$f(x + i) = f(x) + p i + q i^2 + r i^3 + \dots, \quad (8)$$

en la qual $p, q, r, \dots$, eren funcions de x que d'alguna manera depenien de $f(x)$. Per l'obra de Newton —i, sobretot, d'Euler— sabia que la majoria de les funcions particulars que els eren familiars eren d'aquesta mena. Però, ho eren totes, d'aquesta mena? Lagrange s'esforça a provar-ho. Avui sabem que solament són d'aquest tipus les *funcions analítiques* en x —un nom que és hereu de l'obra de Lagrange. Aviat, Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) provaria que la funció $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ no n'és, d'analítica.

Lagrange s'adona també que p és la primera derivada de $f(x)$ i introdueix tant la notació $f'(x)$ com el nom de *derivada*. Per veure qui són els altres coeficients procedeix de la manera següent: a (8), substitueix i per $i + o$ i

41 Conté la inscripció «Au Cm. Maffre de la part/du Conseil de l'Ecole Polytechnique/L.» Jean-François Maffre fou professor de l'École sobre la construcció de ponts. Vegeu http://www.vialibri.net/552display/year_1797_1.html.

42 Per a una petita mostra d'aquest text, vegeu [17, p. 388–391] que acompanya altres intents de fonamentar el càlcul en bases sòlides.

desenvolupa; d'altra banda, també, a (8), substitueix x per $x + o$ i desenvolupa. Compara els coeficients de les dues expressions i obté:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2} p'(x) = \frac{1}{2} f''(x), \\ r(x) &= \frac{1}{3!} q''(x) = \frac{1}{3!} f'''(x), \\ s(x) &= \frac{1}{4!} r''(x) = \frac{1}{4!} f''''(x), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Així observa que, de fet, (8) és el desenvolupament en *série de Taylor* de $f(x)$:

$$f(x + i) = f(x) + f'(x) i + \frac{1}{2} f''(x) i^2 + \frac{1}{3!} f'''(x) i^3 + \dots, \quad (9)$$

i afirma que és fàcil veure que els coeficients $f'(x), f''(x), \dots$ coincideixen amb les derivades successives de la funció $f(x)$. Tanmateix, això depèn del fet que (8) sigui derivable terme a terme respecte de i .

En el text —concretament al capítol VII— hi apareix el *residu de Lagrange* de la sèrie de Taylor.

A (9) substitueix x per $x - i$:

$$f(x) = f(x - i) + f'(x - i) i + \frac{1}{2} f''(x - i) i^2 + \frac{1}{3!} f'''(x - i) i^3 + \dots \quad (10)$$

Ara, a (10), substitueix i per xz i introdueix el residu:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x - xz) + f'(x - xz) xz + \frac{1}{2} f''(x - xz) (xz)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x - xz) (xz)^n + x^{n+1} R(x, z), \quad (11) \end{aligned}$$

que és també l'expressió utilitzada per Taylor per definir el residu. Derivant terme a terme respecte de z , els termes s'eliminen de dos en dos i s'obté:

$$R'(x, z) = \frac{z^n}{n!} f^{(n+1)}(x - xz). \quad (12)$$

Si M i N són el màxim i el mínim de $f^{(n+1)}(x - xz)$ per a $z \in [0, 1]$, s'obté:

$$\frac{M z^n}{n!} \leq R'(x, z) \leq \frac{N z^n}{n!}. \quad (13)$$

Integrant entre 0 i 1, resulta:

$$\frac{M z^{n+1}}{(n+1)!} \leq R(x, z) \leq \frac{N z^{n+1}}{(n+1)!} \text{ per a } z \in [0, 1]. \quad (14)$$

Si, finalment, fem $z = 1$, obtenim

$$\frac{M}{(n+1)!} \leq R(x, 1) \leq \frac{N}{(n+1)!}. \quad (15)$$

Ara Lagrange usa el teorema del valor intermedi per a la funció $\frac{f^{(n+1)}(x-xz)}{(n+1)!}$ i obté l'expressió

$$R(x, 1) = \frac{f^{(n+1)}(x - x\bar{z})}{(n+1)!} \text{ per a } \bar{z} \in [0, 1]. \quad (16)$$

Per fi, substitueix aquesta expressió a (11) amb $z = 1$ i obté:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

amb $u = x - x\bar{z} \in [0, x]$.

L'èxit d'aquesta presentació i dels seus resultats no faria, però, que passés desapercibuda la necessitat d'aprofundir en la noció de *continuitat* de les funcions i les qüestions relacionades amb l'existència de màxims i mínims i del teorema del valor mitjà, però això ho farien matemàtics del segle XIX com ara, per exemple, Cauchy.⁴³

Referències

- [1] ABEL, N. H. «Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement». *Journal de Crelle*, 26 (1829), 131-156.
- [2] ARCHIBALD, T.; FRASER, C.; GRATTAN-GUINNESS, I. (organitzadors). «The History of Differential Equations, 1670-1950». Jornades a Oberwolfach, del 31 d'octubre al 6 de novembre de 2004, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, report n. 51/2004.
- [3] BALL, W. W. R. *A short account of the history of mathematics*. 3a ed. Londres: Macmillan, 1901.
- [4] BARBEAU, E. J. *Pell's equation*. Nova York: Springer-Verlag, 2003. (Problem Books in Mathematics)
- [5] BARTHOLMÈSS, C. *Histoire philosophique de l'Académie de Prusse depuis Leibniz jusqu'à Schelling*. París: Librairie du Marc Ducloux, 1850.
- [6] BELL, E. T. *Men of mathematics*. Nova York: Simon and Schuster, 1937. [Traducció al francès d'Ami Gandillon: *Les grands mathématiciens*. París: Payot, 1939. Reeditat l'any 1959. Traducció al castellà de Felipe Jiménez de Asúa: *Los grandes matemáticos*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Losada, 1948. Reeditat l'any 2010.]
- [7] BERNOULLI, J. *Opera*. 4 v. Ginebra: 1742. Reeditat, amb una introducció de J. E. Hofmann, per Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1968.
- [8] BOS, H. J. M.; BUNN, R.; DAUBEN, J. W.; GRATTAN-GUINNESS, I.; HAWKINS, T. W.; PEDERSEN, K. M. *From the calculus to set theory, 1630-1910. An introductory history*. GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.). Londres: Gerald Duckworth

⁴³ Per a més informació vegeu, per exemple, la tesi doctoral de Judith Grabiner, llegida a Harvard l'any 1966 i recollida a [38].

- & Co. Ltd., 1980. [Traducció al castellà de Mariano Martínez Pérez: *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial, 1984.]
- [9] BRIZARD, A. J. *An introduction to Lagrangian mechanics*. Hackensack, N. J.: World Scientific Publishing, 2008.
- [10] BURTON, D. M. *Elementary number theory*. Boston, Mass.; Londres: Allyn and Bacon, 1976. Reeditat per W. C. Brown Publishers, Dubuque, IA, 1989.
- [11] CANTOR, M. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. 4 v. Berlín: Teubner, 1880-1907.
- [12] CAPECCHI, D. *Lagrange e la storia della meccanica*. Bari: Progedit, 2005.
- [13] CAPECCHI, D.; DE ANGELIS, M.; SEPE, V. *Cinematica piana dei corpi rigidi*. Milà: CISU, 2005.
- [14] COHEN, I. B. *Revolution in Science*. Cambridge, Mass.: Belknap Press, 1985. [Traducció al castellà de Daniel Zadunaisky: *Revolución en Ciencia*. Barcelona: Editorial Gedisa, 1988.]
- [15] D'ALEMBERT, J. L. R. «Recherches sur le calcul intégral». *Actes de l'Académie des Sciences de Paris* (1746), 182-224.
- [16] DELAMBRE, J.-B. J. «Notice sur la vie et les ouvrages de M. le Comte J.-L. Lagrange». A: [76, p. IX-LI].
- [17] DE LORENZO, J. *Análisis Infinitesimal*. Madrid: Tecnos, 1987, 17-29. [Traducció a l'anglès del text de Leibniz a: *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1969.]
- [18] DE MOIVRE, A. *The doctrine of chances: A method of calculating the probabilities of events in play*. Londres: W. Pearson, 1718. Reeditat per Chelsea Publishing Co., Nova York, 1967.
- [19] DICKSON, L. E. *History of the theory of numbers*. 3 v. Washington: Carnegie Institute of Washington, 1919. Reeditat, en tres volums, per Chelsea Publishing Co., Nova York, 1971, i per Dover Publications, Inc., Nova York, 2005.
- [20] EDWARDS, C. H., JR. *The historical development of the calculus*. Nova York; Heidelberg: Springer-Verlag, 1979.
- [21] EULER, L. «Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis». *Memorie academie scientiarum Petropolitanæ*, 8 (1736), 159-190.
- [22] EULER, L. «De solvitione problematvm diophanteorvm per nvmeros integros». *Commentarii academie scientiarum Petropolitanæ*, 6 (1738), 175-188.
- [23] EULER, L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*. Lausane; Ginebra: Marcum Micaelem Bousquet, 1774. [Traducció al castellà d'Alberto Dou: EULER, L. *Método de máximos y mínimos*. Barcelona:

- Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona i la Universitat Politècnica de Catalunya, 1993.]
- [24] EULER, L. «De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo». *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 11 (1767), 28-66. [D'acord amb les anotacions fou presentat a l'Acadèmia de Sant Petersburg el 15 d'octubre de 1759, i una altra vegada el 23 de maig de 1763.]
 - [25] EULER, L. «Elementa calculi variationum». *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 10 (1766), 51-93. Sant Petersburg: Saint Petersburg Kaiserliche Academie der Wissenschaften, 1770.
 - [26] FERMAT, P. DE *Fermat. Opera Varia*. Barcelona: IEC, 2008. [Traducció al català amb comentaris i notes de Pla i Carrera J, Paradís J. i Viader, P.]
 - [27] FERRARO, G. *The rise and development of the theory of series up to the early 1820s*. Nova York: Springer, 2008. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences)
 - [28] GALILEI, G. «Carta a Guidobaldo del Monte de 29 de novembre de 1602». A: [29, vol. x, p. 97-100].
 - [29] GALILEI, G. *Le Opere di Galileo Galilei*. 21 v. Florència: G. Barbera, 1968.
 - [30] GALOIS, E. «Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1831), 417-433. Vegeu [79, p. 21-38].
 - [31] GAUSS, C. F. *Disquisitiones arithmeticae*. Leipzig: Gerhard Fleischer, 1801. [Traducció al català de Griselda Pascual Xufré, [86].]
 - [32] GAUTHIER, A. *Essai historique sur le problème des trois corps*. París: Mlle V. Courcier, 1817.
 - [33] GIBBS, J. W. *Vector analysis*. Yale: Yale University, 1907. Elaborat a partir de les lliçons de J. Willard Gibbs i Edwind Bidwell Wilson. Reimprès per Dover Publications, Nova York, 1960.
 - [34] GILLISPIE, C. C. *Biographical Dictionary of Mathematicians: reference biographies from the Dictionary of Scientific Biography*. 4 v. Nova York: Charles Scribner's Sons, 1970.
 - [35] GIRARD, A. *Invention nouvelle en l'Algèbre*. Amsterdam: Blauew, 1629. Reeditat per D. Bierens De Haan, Muré Frères, Leiden, 1884.
 - [36] GOLDMAN, J. R. *The queen of mathematics. A historically motivated guide to number theory*. Wellesley, Mass.: A K Peters, 1998.
 - [37] GOLDSTINE, H. H. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*. Nova York; Berlín: Springer-Verlag, 1980. (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences; 5)
 - [38] GRABINER, J. V. *The calculus as algebra. J.-L. Lagrange, 1736-1813*. Nova York: Garland Publishing, 1990.
 - [39] GRATTAN-GUINNESS, I. (ed.). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. 2 v. Londres: Rouledge, 1994.

- [40] GRATTAN-GUINNESS, I. *The Fontana History of the Mathematical Sciences: the Rainbow of Mathematics*. Hammersmith: Fontana Press, 1997.
- [41] HAIRER, E.; WANNER, G. *Analysis by its history*. Nova York: Springer, 2008. (Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in Mathematics)
- [42] HUYGENS, C. *Horologium oscillatorium*. París: F. Muguet, 1673.
- [43] ITARD, J. *Essais d'histoire des mathématiques*. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1984.
- [44] ITARD, J. «Lagrange (Joseph-Louis)». A: [34, vol. III, p. 1 301-1 315], en anglès, o bé a <http://www.encyclopedia.com/topic/Joseph-Louis-Louis-Lagrange.aspx>, i a [43, p. 309-334], en francès.
- [45] JAMES, I. *Remarkable mathematicians. From Euler to von Neumann*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America; Cambridge: Cambridge University Press, 2002. (MAA Spectrum)
- [46] KLINE, M. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Nova York: Oxford University Press, 1972. [Traducció al castellà de Carlos Fernández i Alejandro Garciadiego, sota la coordinació de Jesús Hernández: *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. 3 v. Madrid: Alianza Editorial, 1992.]
- [47] LAGRANGE, J.-L. «Carta a Giulio Carlo di Fagnano de 27 de juliol de 1754». A: [76, tom 7, 1877, p 583-588].
- [48] LAGRANGE, J.-L. «Recherches sur la méthode de maximis et minimis». *Miscellanea Taurinensia*, vol. I, 3-20. A: [76, tom 1, 1867, p. 3-20].
- [49] LAGRANGE, J.-L. «Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes». *Miscellanea Taurinensia*, vol. I, 23-36. A: [76, tom 1, 1867, p. 23-36].
- [50] LAGRANGE, J.-L. «Recherches sur la nature et la propagation du son». *Miscellanea Taurinensia*, vol. I, 39-148. A: [76, tom 1, 1867, p. 39-148].
- [51] LAGRANGE, J.-L. «Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies». *Miscellanea Taurinensia*, vol. I, 173-195. A: [76, tom 1, 1867, p. 335-362]. [Traducció parcial a l'anglès a [17, p. 407-413].]
- [52] LAGRANGE, J.-L. «Recherches sur la libration de la Lune, dans lesquelles on tâche de résoudre la question proposée par l'Académie royale des sciences pour le Prix de l'année 1764». *Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, vol. IX (1764). A: [76, tom 6, 1870, p. 5-61].
- [53] LAGRANGE, J.-L. «Sur la méthode des variations». *Miscellanea Taurinensia*, vol. IV, p. 37-63. A: [76, tom 2, 1868, p. 37-63].
- [54] LAGRANGE, J.-L. «Solution d'un problème arithmétique». *Miscellanea Taurinensia*, vol. IV, p. 671-731. A: [76, tom 1, 1867, p. 671-731].
- [55] LAGRANGE, J.-L. «Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré». *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, vol. XXIII (1769). A: [76, tom 2, 1868, p. 377-535].

- [56] LAGRANGE, J.-L. «Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers». *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, vol. XXIV (1770). A: [76, tom 2, 1868, p. 655-726].
- [57] LAGRANGE, J.-L. «Carta a D'Alembert de 20 de novembre de 1769». A: [76, tom 14, 1892, p. 153-156].
- [58] LAGRANGE, J.-L. «Démonstration d'un théorème d'arithmétique». *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, (1770). A: [76, tom 3, 1892, p. 189-201].
- [59] LAGRANGE, J.-L. «Réflexions sur la résolution algébrique des équations». *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, (1770) i (1771). A: [76, tom 3, 1892, p. 205-421].
- [60] LAGRANGE, J.-L. «Nouvelles réflexions sur les tautochrones». *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, vol. I (1770), 97-122. A: [76, tom 3, 1869, p. 157-186].
- [61] LAGRANGE, J.-L. «Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers». *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, (1771). A: [76, tom 3, 1892, p. 425-438].
- [62] LAGRANGE, J.-L. «Essai sur le problème des trois corps». *Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, vol. IX (1772). A: [76, tom 6, 1869, p. 229-331].
- [63] LAGRANGE, J.-L. *Additions aux éléments d'algèbre d'Euler*. Lió: Bruyset, 1774. A: [76, tom 7, 1877, p. 5-180].
- [64] LAGRANGE, J.-L. «Sur la forme des racines imaginaires des équations». *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* (1772). A: [76, tom 3, 1877, p. 479-516].
- [65] LAGRANGE, J.-L. «Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles; et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards». *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* (1775). A: [76, tom 4, 1869, p. 151-251].
- [66] LAGRANGE, J.-L. «Carta a Laplace de 30 de decembre de 1776». A: [76, tom 14, 1892, p. 66-68].
- [67] LAGRANGE, J.-L. «Théorie de la libration de la Lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète». *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* (1780). A: [76, tom 5, 1870, p. 5-122].
- [68] LAGRANGE, J.-L. «Carta a D'Alembert d'1 d'abril de 1781». A: [76, tom 14, 1892, p. 360, carta 164].
- [69] LAGRANGE, J.-L. «Carta a D'Alembert de 21 de setembre de 1781». A: [76, tom 14, 1892, p. 368, carta 167].

- [70] LAGRANGE, J.-L. «Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides». A: [76, tom 4, 1869, p. 695-748].
- [71] LAGRANGE, J.-L. «Carta a Laplace del 15 de setembre de 1782». A: [76, tom 14, 1882, p. 116, carta 20].
- [72] LAGRANGE, J.-L. *Méchanique analytique*. París: Chez la Veuve Desainte, 1888. A: [76, tom 11, 1788].
- [73] LAGRANGE, J.-L. «Leçons élémentaires sur les mathématiques données à l'École Normale en 1795». *Journal de l'École Polytechnique*, VIIe et VIIIe cahiers, tom II, 1812. A: [76, tom 7, 1877, p. 183-288].
- [74] LAGRANGE, J.-L. *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*. París: Mlle Courcier, 1797. A: [76, tom 9, 1881, p. 13-413].
- [75] LAGRANGE, J.-L. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*. París: Courcier, 1808.
- [76] LAGRANGE, J.-L. *Œuvres de Lagrange*. Publicades per J.-A. Serret en catorze volums: 1867, 1868, 1869, 1869, 1870, 1873, 1877, 1879, 1881, 1884, 1888, 1889, 1882, 1892.
- [77] LORIA, G. «G. L. Lagrange nella vita e nelle opere». *Ann. Mat.*, 20 (1913), 9-52. Reimprès a [78, p. 293-333].
- [78] LORIA, G. *Scritti, conferenze, discorsi*. Pàdua: Casa Editrice Dott., 1937.
- [79] MALET, A. (ed.). *Obra d'Évariste Galois*. Barcelona: IEC, 1984. (Monografies de la Secció de Ciències; 1)
- [80] MARACHIA, S. *Storia dell'algebra*. Nàpols: Liguori Editore, 2002.
- [81] MARCHAL, C. *The three-body problem*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, B. V., 1990. (Studies in Astronautics; 4)
- [82] MARIE, M. M. *Histoire des sciences mathématiques et physiques*. París: Gauthier-Villars, 1883-1888. 12 t. en 4 v.
- [83] MEIJERING, E. «A chronology of interpolation from ancient astronomy to modern signal and image processing». *Proceedings of the IEEE*, 90 (3) (2002), 319-342.
- [84] MONTUCLA, J. E. *Histoire des mathématiques*. 4 v. París: Jombert, 1754. Reeditat per Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, 1968.
- [85] MONTUCLA, J. E. *Arithmetica Universalis*. Cambridge: 1707. [Traducció a l'anglès de D. T. Whiteside (ed.): *Mathematical Works of Isaac Newton*, II. Londres: Johnson Reprint Co., 1964.]
- [86] PASCUAL I XUFRE, G. *Disquisicions aritmètiques*. Barcelona: IEC, 1996.

- [87] PESIC, P. *Abel's proof. An essay on the sources and meaning of mathematical unsolvability*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2003.
- [88] PLA I CARRERA, J. «La helena de las matemáticas». *Quaderns*, Fundació Caixa de Pensions, 43 (1989), 61-71.
- [89] PLA I CARRERA, J. «Les matemàtiques i els matemàtics de la Revolució Francesa». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 11 (2) (1996), 31-78.
- [90] PLA I CARRERA, J. «La *Mémoire* d'Évariste Galois, anotada i comentada». Pendent de publicació.
- [91] REIFF, R. A. *Geschichte der unendlichen Reihen*. Tübingen: H. Laupp'sche Buchhandlung, 1889. Reimprès per Martin Sändig, Wiesbaden, 1969, i novament per BiblioBazaar.
- [92] REY PASTOR, J. *Resumen de las Lecciones de Análisis Matemático*. Madrid: 1915. Reeditat amb el títol: *Lecciones de Álgebra*. Toledo: A. Medina, 1924 i 1931; Madrid: C. Bermejo, 1947; Madrid: Nuevas Gráficas, 1954 i 1960.
- [93] ROSSO, R. *Corso di Storia della algebra*, 2012.
- [94] RUFFINI, P. *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali; opuscolo del cav. dott. Paolo Ruffini*. Mòdena: Società tipografica, 1813. Es recull a: *Opere Matematiche*. BERTOLOTTI, E. (ed.). 3 v. Roma: Cremonese della Casa Editrice Perrella, 1953-1954.
- [95] SCHARLAU, W.; OPOLKA, H. *Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung*. Berlín; Nova York: Springer-Verlag, 1980. [Traducció a l'anglès de W. K. Bühler i G. Cornell: *From Fermat to Minkowski: lectures on the theory of numbers and its historical development*. Nova York: Springer, 1985.]
- [96] TATON, R. «Inventaire chronologique de l'oeuvre de Lagrange». *Rev. Hist. Sci.*, 27 (1974), 3-36.
- [97] TODHUNTER, I. *A history of the calculus of variations during the nineteenth century*. Londres: MacMillan, 1873. Reproduït a Nova York: Dover Publications, 1949.
- [98] THOMASSET, T. *Histoire du Système métrique*.
- [99] VACCA, G. «Sui manoscritti inediti di Leibniz». *Bollettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 2 (1899), 113-166.
- [100] VALTONEN, M.; KARTTUNEN, H. *The three-body problem*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [101] VAN DER WAERDEN, B. L. *A history of algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Berlín: Springer-Verlag, 1985.
- [102] WARING, E. *Meditationes algebraicæ*. Cambridge: Archdeacon, 1770.
- [103] WARING, E. «Problems concerning Interpolations». *Proceedings of the Royal Society of London. Philosophical Transactions of the Royal Society*, 69, 59-67.

- [104] WEIL, A. *Number theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre*. Boston, Mass.: Birkhäuser Boston, 1984.
- [105] WHITFORD, E. E. *The Pell equation*. Nova York: College of the City of New York, 1912.

DEPARTAMENT DE PROBABILITAT, LÒGICA I ESTADÍSTICA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
jpla@ub.edu

Matemàtica financera en temps de crisi

ARTURO VALDIVIA

Sovint es pregunta què fa que un tema matemàtic sigui interessant. Algunes de les qualitats que vénen a la ment són la utilitat, la bellesa, la profunditat i la fertilitat. La utilitat sol mesurar-se per l'aplicació del tema fora de les matemàtiques. La bellesa és una qualitat atractiva que tenen moltes matemàtiques, tot i que sovint només un ull entrenat la pot veure. La profunditat ve a través de la vinculació amb múltiples idees i temes que sovint semblen fora del context original. I la fertilitat significa que, amb un esforç raonable, s'aconsegueixen resultats nous, alguns d'útils, alguns de bonics, i potser d'altres més profunds, que esperen ser descoberts.

Peter Forrester

El preu que els homes bons paguen per la seva indiferència vers els assumptes públics és el de ser governats per homes malvats.

Plató

Resum: En aquest treball es presenten alguns dels processos i càlculs estocàstics importants per a la teoria quantitativa del risc creditici. Aquesta branca de la matemàtica financera té com a objecte d'estudi els contractes amb risc de fallida, és a dir, contractes en els quals existeix el risc de patir una pèrdua econòmica a causa de l'incompliment —intencionat o no— de les obligacions adquirides per alguna de les parts que signen el contracte. Aquest tipus de contractes és omnipresent en la crisi econòmica actual; per això, en aquests temps de crisi mundial, ens interessa discutir-los des de la matemàtica financera.

Paraules clau: càlcul estocàstic, matemàtiques financeres, modelització estocàstica, processos estocàstics, risc creditici.

Classificació MSC2010: 60-01, 60H30, 60G05.

Aquest treball fou el guanyador del Premi Albert Dou de l'any 2012.

1 Introducció

Bella, fèrtil, profunda i útil són potser alguns dels adjectius usuals que faria servir un matemàtic a l'hora de referir-se a una fórmula, o bé a qualsevol altre objecte matemàtic. No obstant això, fora del gremi científic, la —mala— experiència ens diu que els adjectius més freqüents sobre una equació solen ser senzillament *complicada* i *incomprensible*. El que sembla increïble, almenys fins a cert punt, és que una fórmula pugui ser *culpable* de destruir l'economia mundial, tal com anunciava el titular d'un article publicat recentment per la BBC (vegeu [25]). L'equació acusada és la *fórmula de Black-Merton-Scholes* perquè estima el preu del contracte financer conegut per *opció europea de venda*.¹ Sense entrar ara com ara en detalls, heus aquí la fórmula sentenciada:

$$Ke^{-r(t-T)}\Phi\left(-\frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - S_t\Phi\left(-\frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \quad (1)$$

Aquesta fórmula, que va merèixer el Premi Nobel d'Economia el 1997, va ser obtinguda a l'inici dels anys setanta per Fischer Black (1938-1995), Robert C. Merton i Myron S. Scholes (vegeu [8] i [43]).



D'esquerra a dreta, Black, Merton i Scholes.

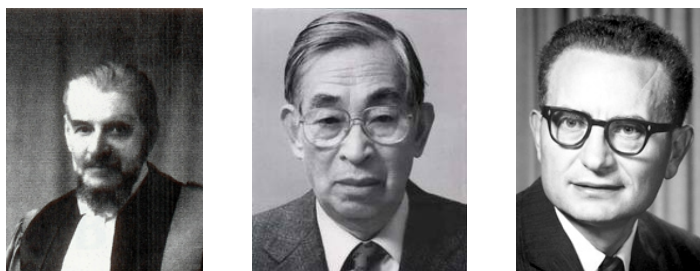
En el model de mercat considerat per a obtenir la fórmula se segueix la proposta de Paul Samuelson (1915-2009) —guanyador del Premi Nobel d'Economia de 1970— de modelar l'evolució del preu dels actius en termes de l'exponencial d'un *moviment brownià*.² Aquesta proposta prové de l'evidència empírica segons la qual els increments del logaritme del preu són independents; una característica que posa de manifest justament el moviment brownià. De fet, la idea original d'usar un model probabilístic per modelar el mercat de valors és habitualment atribuïda a Luis Bachelier (1870-1946), el qual, el 1900, i com

¹ Aquest contracte es formalitza entre dues parts, el *comprador de l'opció* i el *venedor de l'opció*. En signar el contracte, el comprador de l'opció adquireix el dret —però no l'obligació— de vendre un cert producte al venedor de l'opció, per un preu predeterminat a l'hora de signar el contracte. En el contracte es determina també la data en la qual serà possible exercir el dret de venda.

² El procés conegut com a *moviment brownià* és anomenat així en honor al botànic Robert Brown (1773-1858), el qual va observar el moviment molt irregular de partícules de pol·len dins de l'aigua.

a part del seu treball doctoral [1], va fer un dels primers estudis matemàtics sobre el moviment brownià.³ És per aquestes relacions que Robert A. Jarrow, un alumne de Merton de qui parlarem també més endavant, anomena *pare, avi i besavi* de la matemàtica financera en temps continu Merton, Samuelson i Bachelier, respectivament (vegeu [29]).

D'altra banda, en els càlculs que porten finalment a l'obtenció de la fórmula (1) es fa ús del lema d'Itô, resultat clau⁴ del càlcul estocàstic desenvolupat per Kiyoshi Itô (1915–2008), guanyador dels premis Gauss 2006 i Wolf 1987. D'acord amb Jarrow, abans del treball de Merton ningú en la professió financera tenia coneixement del lema d'Itô; avui, en canvi, és una eina fonamental.



D'esquerra a dreta, Bachelier, Itô i Samuelson.

La fórmula de Black-Merton-Scholes és, per tant, un exemple que els resultats de matemàtiques financeres es basen fortament en els processos i els càlculs estocàstics usats per modelar el fenomen objecte d'estudi.

El treball de Black, Merton i Scholes va posar ordre a una situació més aviat caòtica, on la valoració d'opcions —les quals eren productes habituals des d'almenys el segle XVII— es basava en la simple intuïció respecte a un mercat la dinàmica del qual no estava ben definida (vegeu [52]). Cal preguntar-se, doncs, si hauríem pogut evitar la destrucció de l'economia mundial prenent decisions a partir de la intuïció, en lloc d'emprar la fórmula de Black-Merton-Scholes.

Independentment de si un model matemàtic és *bo* o *dolent*, la responsabilitat del seu ús, i la interpretació posterior dels seus resultats, recau en les persones. Per tant, culpar de la crisi una equació sembla igual d'absurd que culpar l'aritmètica de tots els fraus fiscals. En qualsevol cas, tal acusació ens recorda que l'objectiu de la divulgació de la ciència rau a informar el públic i capacitar-lo perquè aprofiti el coneixement científic quan jutgi, per exemple, la legitimitat

³ Després, el 1905 —o *Annus Mirabilis*— Albert Einstein (1879–1955) va treballar també en el tema. No obstant això, va ser Norbert Wiener (1894–1964) el primer a precisar la formulació matemàtica del moviment brownià —que en conseqüència és també conegut com a *procés de Wiener*.

⁴ Un comentari sobre aquest tema per part de l'Acadèmia Nacional de Ciències dels Estats Units: Sense tenir en compte el teorema de Pitàgores en la contesa, és difícil pensar en un resultat matemàtic que avui dia sigui més ben entès i més àmpliament aplicat al món que el *lema d'Itô*. Aquest resultat té el mateix paper en el càlcul estocàstic que el teorema fonamental del càlcul en el càlcul clàssic. És a dir, és el *sine qua non* del tema.

d'un deute o les veritables implicacions derivades d'emprar, correctament o incorrectament, una fórmula matemàtica o una altra en qualsevol àmbit, no només en el financer. Sense aquest coneixement, o sense la capacitat d'usar-lo, no és possible diferenciar entre la fórmula que apareix a (1) i la que apareix a la figura 1. La primera és producte d'un treball seriós, producte de l'evolució d'un model científic que combina l'esforç i el coneixement d'especialistes de diverses disciplines de la matemàtica i altres ciències. La segona fórmula és simplement un disbarat.

LA FÓRMULA ES:

$$BC \approx \sum_{i=1}^{J=t} \left[\frac{(PP)}{\phi \& (\eta) \& (\pi)} + 3(\alpha)^t \right] \approx \Delta [M.C.V^N]$$

Que no desidan por \$i\$

FIGURA 1: Com és possible decidir sense coneixement? I, sense la divulgació adequada, com és possible usar el coneixement generat per la comunitat científica?

Usem el terme *risc creditici* quan ens referim al risc de patir una pèrdua econòmica a causa de l'incompliment —intencional o no— de les obligacions concretes per alguna de les parts que signen un contracte. Com que aquest tipus de contractes és omnipresent en la crisi econòmica actual, s'estudien des de diferents àrees del coneixement. Aquest article té com a objectiu presentar algunes de les idees bàsiques relacionades amb l'estudi del risc creditici des de la *teoria quantitativa del risc creditici*, que és una branca de la matemàtica financera. Mostrarem alguns dels conceptes i tècniques més significatius de les tendències actuals d'aquesta teoria.

En la primera part presentarem els processos (vegeu la secció 2) i els càlculs estocàstics (vegeu la secció 3) necessaris per a la modelització del risc creditici. Estudiarem alguns dels processos estocàstics clàssics (cadena de Markov, processos de Lévy, de Poisson i de Wiener), d'altres d'interès recent (processos de memòria llarga i processos d'àmbit) i motivarem la integració estocàstica respecte a alguns d'aquests processos. En la segona part explicarem algunes idees bàsiques de la matemàtica financera i presentarem els dos punts de vista tradicionals de la teoria quantitativa del risc creditici, que són el *punt de vista estructural* i el *punt de vista de forma reduïda*. Finalment, discutirem alguns aspectes del paper que exerceix la matemàtica financera actualment; amb això destacarem la necessitat que la comunitat matemàtica, en general, s'interessi pel tema i reinterpreti amb nous ulls l'epígraf de Plató que obre aquest article.

2 Processos estocàstics en la modelització del risc

Donat un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, anomenarem *procés estocàstic* $(X_t)_{t \in \mathcal{I}}$ una família de variables aleatòries $X_t: \Omega \rightarrow S$, on $\mathcal{I}$ és un *conjunt d'índexs* i S l'anomenat *espai d'estats* o *espai de valors*. En els casos més habituals $\mathcal{I}$ es pren com a $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $[0, T]$, o bé $\mathbb{R}$, de manera que l'índex t se sol interpretar com el temps. Exemples de S , com veurem a continuació, són conjunts finits, $\mathbb{Z}^n$, o bé $\mathbb{R}^n$.

Intuïtivament, un procés estocàstic es pot pensar com una manera de representar l'evolució d'un fenomen el comportament del qual sigui tan irregular que convingui considerar-lo aleatori. Aquests processos són un dels objectes centrals de la probabilitat moderna, i els escenaris en els quals poden ser aplicats inclouen diverses àrees de les ciències experimentals i les ciències socials. De fet, un mateix procés estocàstic pot servir per a modelar fenòmens diferents que, almenys a primera vista, semblarien desconnectats. Aquest fet estén la noció d'*universalitat* que dona el teorema central del límit i ens fa evocar la frase d'Eliakim H. Moore, amb la qual Samuelson obre el seu llibre [57]:

L'existència d'analogies entre els components centrals de diverses teories implica l'existència d'una teoria general subjacent, la qual unifica les teories particulars pel que fa a aquests components centrals.

Alguns dels exemples clàssics d'aplicació provenen de l'estudi del canvi climàtic, creixement de tumors, epidèmies, expansió de rumors en una xarxa social, evolució del preu dels actius en la borsa, detecció d'emissió de partícules, dinàmica de poblacions, filtratge de senyals, hidrologia, lingüística, optimització, recurrència de terratrèmols, teoria del control, teoria de cues i turbulència de fluids (vegeu [3, 56, 61]). No obstant això, la metodologia de fons permet abordar també problemes de la matemàtica bàsica. Un dels exemples favorits relacionats amb això és l'estudi dels *grafs aleatoris*, concepte introduït per Paul Erdős i Alfréd Rényi al final dels anys cinquanta (vegeu [23]). En aquest escenari, es poden fer servir tècniques probabilístiques per a donar exemples de l'existència de grafs amb característiques específiques.

A continuació, presentem alguns processos estocàstics relacionats amb la modelització en matemàtiques financeres, d'alguns dels quals se n'ha consolidat la pràctica. Aquest és el cas de les cadenes de Markov, el procés de Poisson, el procés de Wiener i altres processos de Lévy. Altres processos que presentem tenen un interès més recent i els models corresponents encara estan en discussió. Ens referim als processos d'àmbit i als processos fraccionaris. Ens centrarem en els processos amb conjunts d'índexs continus, i ens referim a [51, 63, 62] per a la discussió de la matemàtica financera a temps discret.

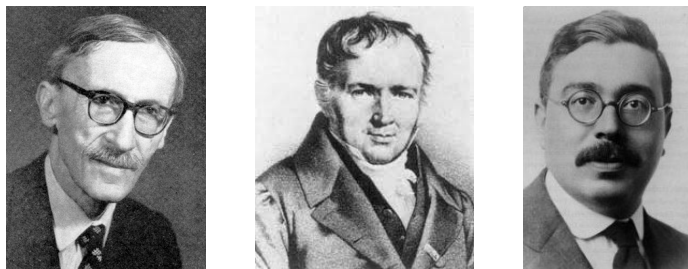
2.1 Processos de Lévy i l'evolució dels preus

Com s'ha esmentat ja en la introducció, el model de Samuelson proposa modelar l'evolució del preu dels actius utilitzant l'exponencial d'un moviment brownià.

L'evidència empírica relacionada amb aquesta proposta és que el logaritme dels preus té increments independents.

Un altre fet empíric que es pot considerar és la possibilitat que el preu tingui una caiguda o pujada sobtades. En altres paraules, que l'evolució del preu sigui discontinua. Aquestes discontinuïtats es poden donar després de l'aparició inesperada d'un esdeveniment significatiu, com pot ser un fenomen climàtic, un canvi legislatiu, una demanda, un descobriment científic, etc.

El procés de Wiener, o moviment brownià, té trajectòries contínues, de manera que no pot posar de manifest la discontinuïtat en l'evolució del preu suggerida per l'evidència empírica. Una manera de resoldre això és agregant un procés de Poisson, el qual modelitza els *salts* i dóna lloc a discontinuïtats. Més generalment, la idea és modelar l'evolució dels preus utilitzant un procés de Lévy. Precisem la definició d'aquests processos.



D'esquerra a dreta, Lévy, Poisson i Wiener.

DEFINICIÓ 1. Un procés estocàstic $(L_t)_{t \in [0, T]}$ s'anomena *procés de Lévy* si satisfà les condicions següents:⁵

1. $L_0 = 0$.
2. Té *increments estacionaris*, és a dir, la distribució dels increments $L_{t+s} - L_t$ depèn només de $t - s$, i no de t .
3. Té *increments independents*, és a dir, si $r < s \leq t < u$ llavors $L_u - L_t$ i $L_s - L_r$ són variables aleatòries independents.

Una característica important dels processos de Lévy és que per a tot $t \in [0, T]$, L_t té una distribució infinitament divisible. Recordem que una distribució F es diu *infinitament divisible* si per a tot enter $n > 1$ existeixen variables aleatòries $\xi_1, \dots, \xi_n$ independents i idènticament distribuïdes tals que $\xi_1 + \dots + \xi_n$ té distribució F . Aquest és el cas de les distribucions normal i de Poisson. Per a veure que L_t té efectivament una distribució infinitament divisible n'hi ha prou

⁵ Per excloure processos que inclouen salts en moments predeterminats (no aleatoris) s'ha d'imposar també la condició $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|L_{t+h} - L_t| \geq \varepsilon) = 0$ per a tot $\varepsilon > 0$. Referències clàssiques sobre processos de Lévy i les seves aplicacions en finances es poden trobar a [58, 12, 59, 60].

amb considerar la suma telescòpica

$$L_t = \sum_{k=0}^{n-1} (L_{(k+1)\Delta} - L_{k\Delta}), \quad n > 1, \quad \Delta := t/n. \quad (2)$$

Aquesta suma mostra que L_t es pot escriure com la suma arbitrària de variables independents $L_{(k+1)\Delta} - L_{k\Delta}$, amb distribució igual a la de L_Δ . El resultat recíproc també és cert: tota distribució infinitament divisible defineix un procés de Lévy.⁶

DEFINICIÓ 2. El *moviment brownià*, o *procés de Wiener*, és un procés de Lévy $(W_t)_{t \in [0, T]}$ en el qual, per a tots $s, t: 0 \leq s < t \leq T$, els increments $W_t - W_s$ tenen una distribució normal $N(0, t - s)$.

DEFINICIÓ 3. El *procés de Poisson* és un procés de Lévy $(N_t)_{t \in [0, T]}$ en el qual, per a tots $s, t: 0 \leq s < t \leq T$, els increments $N_t - N_s$ tenen una distribució de Poisson amb paràmetre $\lambda(t - s)$.

2.1.1 Salts i teoria de la ruïna. El procés de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$ pot utilitzar-se per modelar els temps en què ocorren determinats esdeveniments. Per exemple, com veurem en la secció 4, la fallida en una empresa es pot modelar com el primer moment en què un determinat paràmetre econòmic experimenta un *salt* —i. e., increment o decrement. Per exemple, si definim que un esdeveniment tindrà lloc en el primer moment en què $(N_t)_{t \geq 0}$ tingui un salt, i. e.,

$$\tau := \inf\{t \in [0, T] : N_t = 1\} = \inf\{t \in [0, T] : N_t > 0\}, \quad (3)$$

llavors podem demostrar que τ té distribució exponencial, i. e., $\mathbb{P}(\tau > t) = \exp(-\lambda t)$. En efecte,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau > t + s) &= \mathbb{P}(N_{t+s} = 0) = \mathbb{P}(N_s = 0, N_{t+s} - N_s = 0) = \\ &= \mathbb{P}(N_s = 0) \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = 0) = \mathbb{P}(N_s = 0) \mathbb{P}(N_t = 0). \end{aligned}$$

Les primeres identitats se segueixen de que els increments de $(N_t)_{t \geq 0}$ són independents i estacionaris.

Observeu que en un procés de Poisson tots els increments són de grandària 1. Això es pot generalitzar de manera que la grandària dels salts tingui una distribució donada.

DEFINICIÓ 4. Sigui $(N_t)_{t \geq 0}$ un procés de Poisson amb intensitat λ , i sigui $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successió de variables independents i idènticament distribuïdes amb llei F . Suposem que $(N_t)_{t \geq 0}$ i $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ són independents. Un *procés de Poisson compost* amb intensitat $\lambda > 0$ i *distribució de la grandària dels salts* F és un procés estocàstic $(J_t)_{t \geq 0}$ definit per

$$J_t := \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k, \quad t \geq 0.$$

⁶ Vegeu, per exemple, el corollari 11.6 a [58].

El procés de Poisson compost es pot utilitzar per donar un model clàssic en la teoria de la ruïna (vegeu [17]). En efecte, podem modelar el capital d'una asseguradora de la manera següent:

$$C_t := C_0 + ct - J_t = C_0 + ct - \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k, \quad t \geq 0,$$

on C_0 és una constant que representa el capital inicial de l'asseguradora i ct representa el capital que paguen en conjunt tots els assegurats. Finalment, ξ_k representa els imports que perd o que guanya l'asseguradora quan un dels clients té un accident. Aquest model correspon a la intuïció que els accidents van ocorrent en moments aleatoris (modelats pels salts de $(N_t)_{t \in [0, T]}$), i que l'import de cadascun d'aquells ascendeix a ξ_k , $k \in \mathbb{N}$.

2.1.2 Trajectòries i simulació d'un procés estocàstic. Si fixem un escenari $\omega \in \Omega$, podem considerar l'aplicació $\alpha \mapsto X(\omega, \alpha)$. Anomenarem *trajectòria de ω* aquesta aplicació i la denotarem per $X(\omega)$. La simulació de processos estocàstics s'entén com la simulació de trajectòries. En la figura 2 es mostra la simulació de dues trajectòries. Com hem esmentat abans, les trajectòries del procés de Wiener $(W_t)_{t \in [0, T]}$ són contínues.⁷

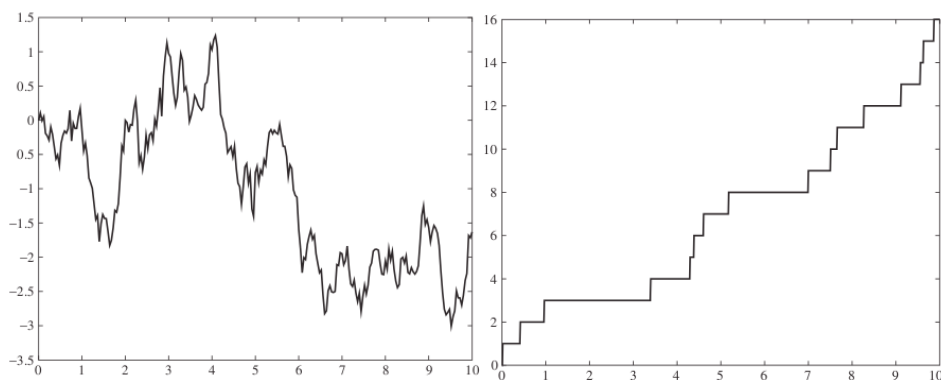


FIGURA 2: Es mostra una trajectòria del procés de Wiener (esquerra) i una del procés de Poisson (dreta).

La suma telescòpica de (2), i la propietat que els increments $W_{t+\Delta} - W_t$ són independents i tenen distribució $N(0, \Delta)$, ens suggereixen l'algoritme següent per a simular una trajectòria d'un procés de Wiener en una partició de $[0, T]$ amb N punts equidistants $\{t_k := kT/N, 0 \leq k \leq N\}$ de temps:

⁷ Una presentació dels nous desenvolupaments en l'àrea de simulació es pot trobar a [54].

Algoritme 1: Simulació d'una trajectòria d'un procés de Wiener en una partició de $[0, T]$ amb N punts equidistants $\{t_k := kT/N, 0 \leq k \leq N\}$ de temps.

1. Definir $W_0 := 0$.
2. Des de $k = 1$ fins a N
 - a) Generar la variable aleatòria X amb distribució $N(0, \frac{T}{N})$.
 - b) Definir $W_{t_k} := W_{t_{k-1}} + X$.

De manera similar tenim un algoritme per a simular un procés de Poisson. Com que aquest procés és esglaonat, només hem de simular els moments en què es produeixen els salts. Recordem que si U és una variable aleatòria amb una distribució uniforme en $(0, 1)$, llavors $X := -\ln(U)/\lambda$ té una distribució exponencial amb paràmetre λ .

Algoritme 2: Simulació dels salts d'un procés de Poisson.

1. Definir $t := 0$, i definir un vector S .
2. Generar U amb distribució uniforme a $(0, 1)$.
3. Actualitzar el valor de t amb $t - \ln(U)/\lambda$.
4. Mentre $t < T$
 - a) Agregar t al vector S .
 - b) Generar U amb distribució uniforme en $(0, 1)$.
 - c) Actualitzar el valor de t amb $t - \ln(U)/\lambda$.

2.2 Cadenes de Markov i les agències de qualificació

Una *agència de qualificació de risc* és una empresa dedicada a avaluar el risc creditici al qual estan exposats determinats productes financers oferts per empreses, per governs regionals o per estats. La qualificació —o *rating*— assignada descriu fins a quin punt té risc el producte d'acord amb els criteris de cada agència. Els inversors utilitzen aquestes qualificacions per a obtenir informació sobre els productes financers en els quals desitgen invertir.

Alguns exemples⁸ d'agències de qualificació que podem trobar últimament en els mitjans són Dun & Bradstreet, Fitch, Moody's i Standard & Poor's. Arran de les crítiques i sospites sobre el funcionament d'aquestes agències, han aparegut algunes iniciatives per tal d'estructurar comunitats —no empreses!— de qualificació.⁹

⁸ Es pot trobar una llista extensa d'agències de qualificació a <http://www.defaultrisk.com>.

⁹ Una idea interessant sobre aquest tema es pot trobar a <http://www.wikirating.org>.

Els productes financers són monitoritzats i requalificats constantment. En conseqüència, una cadena de Markov dona un model per als canvis de qualificació —o *migració creditícia*— que experimenta un producte a través del temps (vegeu [30]). Precisem aquest concepte.

DEFINICIÓ 5. Sigui $S = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ un espai de valors amb una quantitat finita d'elements, els quals anomenarem *estats*. Una *cadena de Markov* és un procés estocàstic $C: \Omega \times \mathbb{N}_0 \rightarrow S$ amb la propietat que

$$\mathbb{P}(C_k = s \mid C_{k-1}, \dots, C_0) = \mathbb{P}(C_k = s \mid C_{k-1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, s \in S. \quad (4)$$

Un estat s_i es diu *absorbent* si $\mathbb{P}(C_k = s_j \mid C_{k-1} = s_i) = \delta_{ij}$ per a tot $k \in \mathbb{N}_0$.

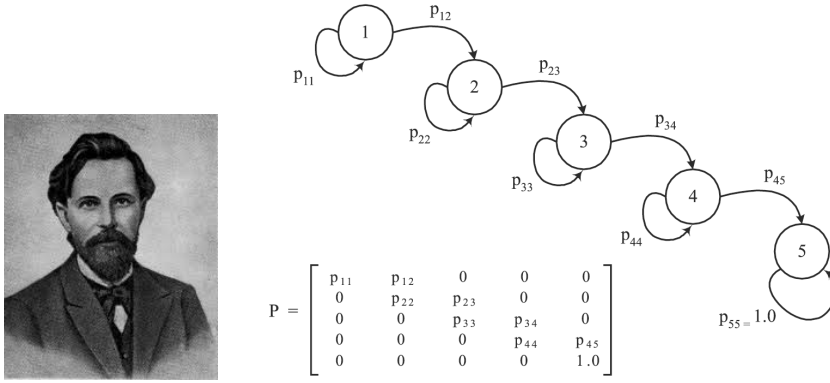


FIGURA 3: Andrej Markov (1856–1922) i un exemple d'una cadena de Markov.

Les qualificacions que aplica Standard & Poor's són, de millor a pitjor, AAA, AA+, AA, AA−, A+, A, A−, BBB+, BBB, BBB−, BB+, BB, BB−, B+, B, B−, CCC+, CCC, CCC−, CC, C, i D. De manera que els estats de la cadena de Markov associada serien

$$S = \{AAA, AA+, AA, AA-, \dots, CCC-, CC, C, D\}.$$

L'estat D s'entén com l'estat de fallida —o *default*, en anglès. Suposarem que una vegada que s'arriba a l'estat de fallida ja no és possible sortir-ne, és a dir, que l'estat de fallida és un estat absorbent de la cadena de Markov.

Un dels problemes més importants en aquest model és calcular la probabilitat d'arribar a l'estat de fallida abans d'un temps $T \in \mathbb{N}$ o, equivalentment, calcular la distribució del temps aleatori (cf. (3))

$$\tau := \inf \{k \in \{0, 1, 2, \dots, T\} : C_k = D\}. \quad (5)$$

Vegem com es pot calcular aquesta distribució. Considerem la matriu definida per

$$P := \left(p_{ij} = \mathbb{P}(C_1 = s_j \mid C_0 = s_i) \right)_{i,j=1}^n.$$

L'entrada p_{ij} és igual a la probabilitat de passar a l'estat s_j , atès que l'estat actual és s_i . Aquesta matriu es denomina *matriu de transició*. Les seves potències descriuen els canvis d'estat —o *transicions*— de la cadena. Més específicament, si $p_{ij}^{(k)}$ és la probabilitat que, partint de l'estat s_i , s'arribi a l'estat s_j després d'exactament k passos, llavors es demostra que

$$\begin{pmatrix} p_{11}^{(k)} & \cdots & p_{1n}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^{(k)} & \cdots & p_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}^k.$$

Per tant, la probabilitat que partint de l'estat $s_0 = AAA$ no arribem a l'estat de fallida $s_n = D$ abans de T passos és igual a

$$\mathbb{P}(\tau > T) = \sum_{j \neq n} p_{1j}^{(T)} = 1 - p_{in}^{(T)}.$$

2.3 Espiral de Wiener, moviment brownià fraccionari

El procés de Poisson i el de Wiener satisfan una condició anàloga a l'expressada a (4), és a dir, donat el valor actual, l'evolució futura del procés és independent del seu passat. Direm que un procés és *markovià* si compleix aquesta condició. Veurem a continuació una generalització del moviment brownià —el *moviment brownià fraccionari*— que pot deixar de ser markovià i exhibir, en canvi, una *memòria llarga*, és a dir, que valors futurs del procés estiguin correlacionats amb els seus valors passats.

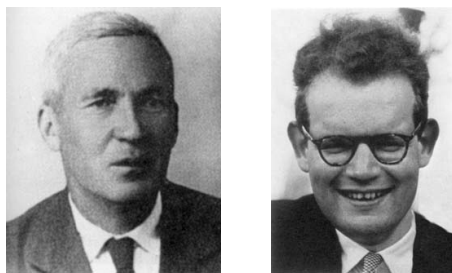
El moviment brownià fraccionari va ser introduït per Andrej Kolmogorov (1903–1987) quan estudiava les anomenades *espirals de Wiener*, mentre que Benoît Mandelbrot (1924–2010) i John Van Ness van desenvolupar diverses propietats d'aquest procés (vegeu [42, 18]).

DEFINICIÓ 6. Sigui A un conjunt d'índexs igual a $[0, T]$ o a $\mathbb{R}$. Direm que el procés estocàstic $(B_t^H)_{t \in A}$ és un *moviment brownià fraccionari de paràmetre* $H \in (0, 1)$ si satisfà les condicions següents:

1. $B_0^H = 0$.
2. És un *procés gaussià*, i. e., per a tot conjunt finit d'índexs $t_1, \dots, t_k$ es compleix que $(B_{t_1}^H, \dots, B_{t_k}^H)$ té una distribució normal multivariada.
3. B_t té una esperança igual a 0, per a tot $t \in A$.
4. Per a cada $s, t \in A$ es compleix que

$$\mathbb{E}[B_s^H B_t^H] = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (6)$$

Mandelbrot va denominar el paràmetre H *paràmetre de Hurst*, en honor a Harold Hurst (1880–1978), el qual amb els seus estudis estadístics sobre els desbordaments del riu Nil va trobar que dades molt llunyanes en el temps estaven correlacionades. Aquesta característica de memòria llarga es modela bé amb el moviment brownià fraccionari.



D'esquerra a dreta, Kolmogorov i Mandelbrot.

Actualment, l'aplicació d'aquest procés en matemàtiques financeres s'estudia en diverses direccions. Per exemple, com una generalització de la modelització de l'evolució dels preus dels actius, reemplaçant el moviment brownià per un moviment brownià fraccionari (vegeu [47]). També, com un model per a l'evolució de variables macroeconòmiques, com els tipus d'interès, els quals, segons l'evidència empírica, no són markovians (vegeu [5]).

Les estructures fractals¹⁰ tenen una característica important coneguda com a *autosimilitud*, que intuïtivament podem pensar com la invariància en l'estructura en *fer zoom* en una de les parts. El moviment brownià fraccionari és també autosimilar en el sentit estadístic precisat per la proposició següent.¹¹

PROPOSICIÓ 7. Si $(B_t^H)_{t \in \mathcal{I}}$ és un moviment brownià fraccionari de paràmetre $H \in (0, 1)$, aleshores¹²

$$(s^{-H} B_{st}^H)_{t \in \mathcal{I}} \stackrel{d}{=} (B_t^H)_{t \in \mathcal{I}}, \quad s > 0.$$

Si fixem $H = \frac{1}{2}$ i $A = [0, T]$ llavors obtenim el moviment brownià estàndard que hem vist abans. De manera que el moviment brownià també és autosimilar. Cal destacar que $H = 1/2$ és l'únic valor per al qual $(B_t^H)_{t \in \mathcal{I}}$ té increments independents.

¹⁰ Benoît Mandelbrot és ben conegut pel seu llibre titulat *La geometria fractal de la natura* (vegeu [39]). En [40] i [41] es poden trobar algunes idees de característiques fractals associades amb la matemàtica financera.

¹¹ La demostració d'aquest resultat és una conseqüència immediata del fet que la funció de covariància de (6) és homogènia d'ordre $2H$.

¹² El símbol $\stackrel{d}{=}$ denota igualtat en distribució.

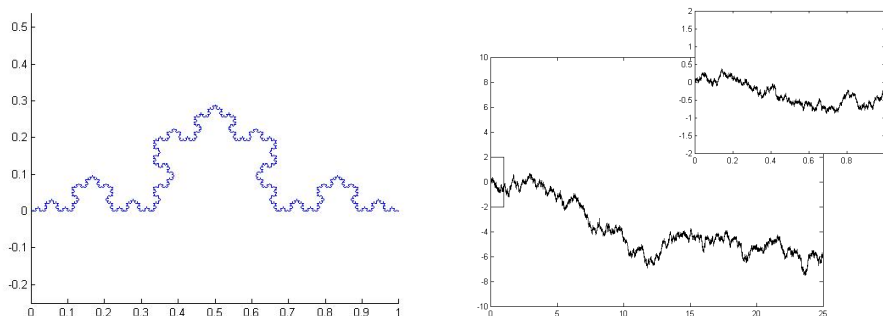


FIGURA 4: A l'esquerra apareix el fractal conegut com a *floc de neu de Koch*, i a la dreta una trajectòria d'un moviment brownià fraccionià amb una secció ampliada per a mostrar autosimilitud.

2.4 Camps estocàstics i processos d'àmbit

En la definició de *procés estocàstic* que hem establert a l'inici de la secció 2 esmentem que el conjunt d'índexs I sol ser un subconjunt de $\mathbb{R}$. Una extensió natural consisteix a prendre un conjunt d'índexs en temps i espai, és a dir, de la forma $J := \mathbb{R} \times \mathcal{X}$, on la nova component *espacial* pot ser, per exemple, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Anomenarem *camp estocàstic* aquesta extensió i la denotarem per $(I(t, x))_{(t, x) \in J}$.

Un *camp d'àmbit* és un camp estocàstic $(I(t, x))_{(t, x) \in J}$ tal que, per a cada $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X}$, el valor de $I(t, x)$ depèn d'un cert conjunt $A(t, x) \subset (-\infty, t] \times \mathcal{X}$, el qual denominem *àmbit associat a* (t, x) . Un àmbit $A(t, x)$ pot ser bastant general, però és usual triar-lo de manera que sigui homogeni en espai i en temps, és a dir, fixat $A(0, 0) \subset (-\infty, 0) \times \mathcal{X}$, es defineix per a cada $(t, x) \in J$ l'àmbit $A(t, x) := \{(s, i) \in J : (s - t, i - x) \in A(0, 0)\}$. El rol d'un àmbit $A(t, x)$ és establir un con de causalitat, definint quins esdeveniments passats tenen efecte en el valor present del camp estocàstic. Pensarem, doncs, que $I(t, x)$ és donat per

$$I(t, x) = \int_{A(t, x)} g_{(t, x)}(s, \xi) \sigma(s, \xi) L(ds, d\xi), \quad (7)$$

on g és una funció determinista, la *volatilitat* σ és un altre camp estocàstic i la integral s'ha d'entendre com una integral estocàstica (tipus Walsh [66]) respecte de la mesura aleatòria L . Per a més detalls sobre la definició precisa de *camp d'àmbit* ens referim a [3, 2, 14]. No obstant això, esmentem que una manera de motivar (7) és considerar equacions en derivades parcials perturbades per un *soroll blanc en espai i temps* (cf. [46]). Usarem una heurística similar en la secció 3.3 per motivar les equacions diferencials estocàstiques en el sentit d'Itô.

Un *procés d'àmbit* $(X_\theta)_{\theta \in I}$ és la restricció d'un camp d'àmbit $(I(t, x))_{(t, x) \in J}$ al llarg d'una corba α , és a dir, donat un subconjunt de $\mathbb{R}$, I , i una corba $\alpha: I \rightarrow J$, $(X_\theta)_{\theta \in I}$ és donat per $X_\theta := I(\alpha(\theta))$. Aquests processos van ser

introduïts a mitjan de la dècada passada per Barndorff-Nielsen, Schmiegel i col·laboradors (vegeu [3]), amb l'objectiu de modelar la turbulència en fluids i el creixement de tumors. Actualment s'estudien les propietats teòriques i les possibles aplicacions d'aquests processos. En particular, quant a l'estudi teòric, una línia de recerca tracta del desenvolupament d'un càlcul estocàstic associat. Pel que fa a les aplicacions financeres, s'estudia, per exemple, la viabilitat de modelar variables macroeconòmiques i preus de derivats fent servir processos d'àmbit (vegeu [14]), així com la seva aplicació en problemes de risc creditici (vegeu la secció 4). Més encara, s'estudia la possibilitat de modelar directament el valor de derivats financers sense necessitat d'imposar una dinàmica específica per als preus dels actius, contrastant això amb els enfocaments clàssics que obtenen el valor dels derivats a partir del supòsit d'una dinàmica específica per a l'evolució dels preus dels actius.

3 Càlcul estocàstic

Comencem per fixar un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i considerem un procés de Wiener $(W_t)_{t \in [0, T]}$. Anomenarem *filtració* tota successió creixent de σ -àlgebres $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$. Donat un procés estocàstic $(X_t)_{t \in [0, T]}$, anomenarem *filtració natural generada per X* la filtració definida per

$$\mathbb{F}^X := (\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s, s \leq t))_{t \in [0, T]}.$$

En les aplicacions, les filtracions representen la informació disponible sobre el fenomen estudiat. Més específicament, $\mathcal{F}_{t_0}^X$ representa la informació disponible que prové d'observar el fenomen —modelat per $(X_t)_{t \in [0, T]}$ — fins a un temps t_0 .

3.1 La integral estocàstica

La integral estocàstica es defineix en dos passos. Primer, es construeix la integral com una isometria $I_0: \mathcal{E}_T \rightarrow L^2([0, T] \times \Omega)$, sent $\mathcal{E}_T$ una classe de processos *esglaonats*, és a dir, processos de la forma

$$u_t := \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(t), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

on $0 =: t_0 \leq \dots \leq t_n =: T$ i, per a cada $j = 1, \dots, n$, u_j pertany a $L^2(\Omega)$ i és $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ -mesurable. Sigui Λ_T l'adherència de $\mathcal{E}_T$ a $L^2([0, T] \times \Omega)$. El segon pas de la construcció és estendre I_0 a una isometria $I: \Lambda_T \rightarrow L^2(\Omega)$. De manera que si $u^n \rightarrow u$ a $L^2([0, T] \times \Omega)$, aleshores $I(u) := \lim I_0(u^n)$, en el sentit de $L^2(\Omega)$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_T & & \\ \downarrow & \searrow I_0 & \\ \Lambda_T & \xrightarrow{I} & L^2(\Omega). \end{array}$$

Per al primer pas de la construcció definim la integral de $u = (u_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{E}_T$ com a

$$\mathcal{E}_T \xrightarrow{I_0} L^2(\Omega)$$

$$\sum_{j=1}^n u_j \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(t) \mapsto I_0(u) := \int_0^T u_t dW_t := \sum_{j=1}^n u_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}).$$

Vegem-ne un exemple. Si considerem el procés esglaonat següent:

$$u_t^n := \sum_{j=1}^n W_{t_{j-1}} \mathbf{1}_{(t_{j-1}, t_j]}(t), \quad n \geq 1, t \geq 0,$$

es pot veure que $u^n \rightarrow W$ i que es compleix la igualtat següent:

$$\begin{aligned} \int_0^T W_t dW_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n W_{t_{j-1}} (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2) - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})^2 = \\ &= \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} T. \end{aligned}$$

Això contradiu la intuïció que tindriem en el càlcul determinista: si $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció determinista diferenciable tal que $x_0 = 0$ (escrivint x_t en lloc del clàssic $x(t)$), llavors

$$\int_0^T x_t dx_t = \frac{1}{2} x_t^2 \Big|_0^T = \frac{1}{2} x_T^2. \quad (9)$$

Fixeu-vos que la integral estocàstica no es comporta com la integral de Riemann-Stieltjes en el sentit següent. Considerem una successió de particions $\Pi_n := (t_0^n := 0 \leq t_1^n \leq \dots \leq t_{r_n}^n := T)$ tal que el pas de la partició tendeixi a 0. Sigui $\lambda \in [0, 1]$ i definim $\tau_k^n := (1 - \lambda)t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$. Es pot demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{r_n} W_{\tau_k^n} (W_{t_k^n} - W_{t_{k-1}^n}) = \frac{1}{2} B_T^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) T,$$

on el límit és en el sentit de $L^2(\Omega)$. És a dir, per a cada λ tenim una integral diferent. Si prenem $\lambda = 0$ recuperem la definició de la integral d'Itô. Mentre que si prenem $\lambda = \frac{1}{2}$ tenim l'anomenada *integral estocàstica de Fisk-Stratonovich*.

El segon pas de la construcció és més tècnic i l'ometem per simplicitat en l'exposició. Per a una exposició més detallada sobre aquestes idees ens referim a [36, 53, 65].

3.2 Processos i lema d'Itô

Un *procés d'Itô* és un procés estocàstic de la forma

$$X_t := x + \int_0^t u_s dW_s + \int_0^t v_s ds, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

on els processos $(u_s)_{s \in [0, T]}$ i $(v_s)_{s \in [0, T]}$ satisfan determinades condicions. Per conveni, una forma alternativa d'escriure el procés és en la seva *forma diferencial*

$$dX_t = u_t dW_t + v_t dt.$$

La integral estocàstica respecte de $(W_t)_{t \in [0, T]}$ que hem definit es pot estendre a una integral estocàstica respecte del procés d'Itô $(X_t)_{t \in [0, T]}$ com a

$$\int_0^T f_s dX_s = \int_0^T f_s u_s dW_s + \int_0^T f_s v_s ds.$$

Considerem ara n processos de Wiener independents $(W_t^{(k)})_{t \in [0, T]}$, $k = 1, \dots, n$. Definim un *procés d'Itô n -dimensional* com un procés

$$X = (X_t := (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}))_{t \in [0, T]}$$

en què cada component és un procés d'Itô

$$dX_t^{(k)} = \sum_{j=1}^n u_t^{(k,j)} dW_t^{(j)} + v_t^{(k,j)} dt, \quad k = 1, \dots, n, t \in [0, T].$$

El lema d'Itô ens diu si f és una funció $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}$, llavors es compleix que

$$\begin{aligned} f(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(n)}) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, X_s) dX_s + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n \int \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} f(t, X_t) (dX_t^{(k)}) (dX_t^{(j)}), \end{aligned}$$

on $(dX_t)^2$ es calcula d'acord amb les regles següents: $dW_t^{(k)} \times dW_t^{(j)} = \delta_{kj} dt$, $dW_t^{(k)} \times dt = dt \times dW_t^{(k)} = dt \times dt = 0$.

En particular, si prenem la funció $(t, (x^{(1)}, x^{(2)})) \mapsto x^{(1)} x^{(2)}$, obtenim la fórmula següent d'integració per parts:

$$X_t^{(2)} X_t^{(1)} = X_0^{(2)} X_0^{(1)} - \int_0^t X_s^{(2)} dX_s^{(1)} - \int_0^t X_s^{(1)} dX_s^{(2)} + \int_0^t u_s^{(1)} u_s^{(2)} ds.$$

3.3 Equacions diferencials estocàstiques

El moviment brownià és tan irregular que no és possible definir-ne, en el sentit ordinari, la derivada respecte del temps. En efecte, una trajectòria típica del moviment brownià, encara que contínua, no és diferenciable en cap punt. No obstant això, sí que és possible donar un sentit a la derivada (vegeu [26, 27]) i això dóna lloc a l'anomenat *soroll blanc* $\dot{W}(t) := \frac{dW_t}{dt}$ (vegeu [46, definició 1] o [35, exemple 3.13]). Sense entrar en més detalls, pensem ara formalment en $\dot{W}$ per tal de desenvolupar l'heurística següent: si l'equació diferencial determinista¹³

$$\frac{dx_t}{dt} = f(t, x_t) \tag{11}$$

¹³ Com en (9) aquí hem escrit x_t en comptes de $x(t)$.

és pertorbada additivament mitjançant el soroll blanc, obtenim una equació nova de la forma

$$\frac{dx_t}{dt} = f(t, x_t) + \dot{W}(t). \quad (12)$$

Ara bé, d'una banda, en el càlcul determinista l'equació diferencial (11) es pot plantejar com l'equació integral

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_s) ds.$$

Mentre que, d'altra banda, en el càlcul d'Itô $\dot{W}(t)$ i dt es combinen per formar el diferencial brownià dW_t , de manera que l'equació pertorbada (12) pren l'expressió formal

$$dx_t = f(t, x_t) dt + dW_t,$$

la qual ha d'entendre's estrictament com el procés d'Itô

$$x_t = x_0 + \int_0^t f(s, x_s) ds + W_t. \quad (13)$$

Més generalment, per *equació diferencial estocàstica (EDE)*

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \\ X_0 = x_0, \end{cases}$$

entendrem una manera d'escriure formalment el procés d'Itô:

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

Amb determinades hipòtesis sobre els coeficients f i σ és possible establir l'existència i unicitat de la solució d'una EDE (vegeu [53, capítol 9.2] i [48, capítol 5.2]). No obstant això, el lema d'Itô pot servir per a resoldre una EDE quan es conjectura com podria ser-ne la solució. Per exemple, l'estructura de l'EDE següent

$$\begin{cases} dY_t = Y_t(\mu dt + \sigma dW_t), \\ Y_0 = 1, \end{cases}$$

ens suggereix considerar una solució de forma exponencial i, en efecte, si apliquem el lema d'Itô a la funció $F(t, x) := \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma x\right)$ podem comprovar que la solució d'aquesta EDE és $(I_t := F(t, W_t))_{t \geq 0}$.

Les EDE van ser inicialment estudiades per Itô, amb la finalitat de construir determinats processos markovians a partir dels seus generadors infinitesimals (cf. [36]). Des de llavors, les EDE han estat aplicades extensivament a diverses àrees; el lector interessat en podrà trobar un tractat complet a [48]. Cal esmentar que també és possible definir EDE en les quals el paper del moviment brownià és reemplaçat per un procés de Lévy general. Aquestes EDE dirigides per processos

de Lévy tenen aplicacions a la matemàtica financera, per exemple per modelar *intensitats de fallida* (vegeu la secció 4.1.2 i [60, capítol 5]). Sobre aplicacions en altres disciplines, esmentem que una equació com ara (13), però en la qual canviem el moviment brownià per un altre procés de Lévy, pot servir per a modelar l'evolució de les temperatures de la Terra en els últims 250 000 anys (vegeu [64, secció 12.4]).

3.4 Integració estocàstica respecte d'un moviment brownià fraccionari

El 1969 Molchan i Golosov [44] van representar el moviment brownià fraccionari $(B_t^H)_{t \in [0, T]}$ amb paràmetre de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ com a

$$B_t^H = \int_0^T \mathbf{K}[\mathbf{1}_{[0, t)}](s) dW_s, \quad (14)$$

on $\mathbf{K}$ és un nucli determinista de quadrat integrable que actua a $L^2[0, T]$ per¹⁴

$$\mathbf{K}[f](s) := \left(\frac{2H\Gamma(H + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(2 - 2H)} \right)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2} - H} \int_s^T f(u) u^{H - \frac{1}{2}} (u - s)^{H - \frac{3}{2}} du,$$

on Γ és la funció gamma d'Euler.

En el cas d'integrands deterministes es pot construir una integral estocàstica respecte de $(B_t^H)_{t \in [0, T]}$ seguint les idees de la construcció de la integral d'Itô (vegeu [47]). Primer es defineix la integral per a la classe $\mathcal{E}$ de funcions esglaonades, és a dir, funcions $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$u(t) := \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(t), \quad t \in [0, T],$$

on $0 =: t_0 \leq \dots \leq t_n := T$ i $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$. Com a segon pas, considerem inicialment l'espai de Hilbert $\mathcal{H}$ definit com la completació de $\mathcal{E}$ respecte de la norma donada per (cf. (6))

$$\langle \mathbf{1}_{[0, t]}, \mathbf{1}_{[0, s]} \rangle_{\mathcal{H}} := \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

Es pot demostrar (vegeu [50, 49]) que $\mathcal{H}$ és *massa gran*, en el sentit que no és necessàriament un espai de funcions, sinó de distribucions d'ordre negatiu. De manera que hem de restringir-nos a un subespai $\mathcal{H}$, el qual identificarem amb

$$|\mathcal{H}| := \left\{ f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid H(2H - 1) \int_0^T \int_0^T |f(u)| |f(v)| |u - v|^{2H - 2} du dv < \infty \right\}.$$

¹⁴ Fixeu-vos que aquest nucli es pot expressar en termes del càlcul fraccionari de Riemann-Liouville (vegeu [55]).

D'aquesta manera tenim la inclusió $L^2[0, T] \subset |\mathcal{H}| \subset \mathcal{H}$, i la integral obtinguda satisfà

$$\int_0^t f(s) dB_s^H = \int_0^t \mathbf{K}[f](s) dW_s.$$

Encara que en aquesta secció hem partit de la caracterització de (14) per fer front a la integració respecte del moviment fraccionari, també és possible considerar una caracterització diferent, habitualment anomenada *representació de mitjanes mòbils* de Mandelbrot i Van Ness [42]; vegeu, per exemple [16]. No obstant això, és important destacar que amb ambdues caracteritzacions es pot construir una integral estocàstica (pel que fa al moviment brownià fraccionari) seguint les mateixes idees. Algunes relacions entre ambdues caracteritzacions es poden trobar a [34].

4 Teoria quantitativa del risc creditici

Podríem dir, *grosso modo*, que un *contracte financer* és un acord per a intercanviar diners segons unes regles determinades. Generalment, l'acord se signa entre dues parts (persones o institucions) que podem anomenar *comprador* i *venedor*. L'opció europea de venda que hem esmentat en la introducció és un exemple de contracte financer. Anomenarem *benefici* —o *payoff*, en anglès— el pagament que el venedor promet al comprador, i el *preu del contracte* serà la quantitat de diners que el comprador ha de donar al venedor a canvi de rebre el benefici promès.

Com s'ha esmentat ja en la introducció, el risc creditici es refereix al risc de patir una pèrdua econòmica a causa de l'incompliment —intencionat o no—¹⁵ de les obligacions d'alguna de les parts que signen el contracte. Quan es dóna aquest incompliment es diu que ha succeït l'*esdeveniment de fallida*. El temps en què aquest esdeveniment succeeix es diu *temps de fallida*.¹⁶ L'estudi de contractes amb fallida es pot fer des de diferents punts de vista. Nosaltres considerem el problema des de la branca de la matemàtica financera denominada *teoria quantitativa del risc creditici*.

Subjacent al nostre mercat considerarem un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i una filtració $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ que s'interpretarà com la informació disponible al mercat. Suposarem que totes les variables aleatòries i els processos estocàstics considerats estan definits a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Considerarem contractes financers amb risc de fallida que tinguin un benefici de la forma¹⁷

$$X \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + \tilde{X} \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}},$$

¹⁵ Un exemple d'incompliment intencionat és quan l'obligació constitueix un *deute il·legítim* (vegeu [19]). D'altra banda, l'incompliment pot ser no intencionat, per exemple, quan una de les parts no té els recursos econòmics necessaris per a mantenir les seves obligacions.

¹⁶ En anglès, els termes *esdeveniment de fallida* i *temps de fallida* es tradueixen com *default event* i *default time*, respectivament.

¹⁷ Aquest benefici es pot fer més complex, per exemple, agregant un sumand $Z_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}$ en el qual $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ representa el *procés de recuperació*, el qual determina un pagament de recuperació que rep el comprador just en el moment en què es produeix la fallida. Vegeu, per exemple, la secció 2 de [6].

on τ és la variable aleatòria que modela el temps de fallida, $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ és el pagament promès en cas que no hi hagi fallida i $\tilde{X} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ és el pagament promès en cas de fallida. Un dels problemes principals de la matemàtica financera consisteix a definir i calcular el *preu adequat*¹⁸ d'un derivat. En general, el preu adequat és de la forma¹⁹

$$\pi_t(X) := \mathbb{E}^* \left[X \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T], \quad (15)$$

on el benefici X pertany a $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$, el procés estocàstic $(r_t)_{t \in [0, T]}$ modela el tipus d'interès al nostre mercat, $\mathbb{P}^*$ és una probabilitat equivalent²⁰ a $\mathbb{P}$ —de vegades denominada *probabilitat neutral*— i $\mathbb{E}^*$ és l'esperança respecte de $\mathbb{P}^*$.

En conseqüència, un dels problemes principals en el risc creditici és calcular expressions del tipus

$$\mathbb{E}^* \left[(X \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + \tilde{X} \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}) \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T]. \quad (16)$$

La major part dels estudis dedicats al risc creditici té a veure amb la modelització del temps de fallida. La literatura sobre aquest tema se sol dividir segons dos tipus d'enfocaments coneguts com l'*enfocament estructural* i l'*enfocament de forma reduïda*. Els orígens del primer es poden basar en els treballs de Black, Merton i Scholes, mentre que els del segon es basen en el treball de Jarrow²¹ i Turnbull [32] i les extensions fetes a [33, 21] (vegeu [10, 31]). Aquests dos enfocaments se solen considerar competitiu i aïllats l'un de l'altre, i la informació disponible és una de les principals diferències entre tots dos punts de vista (vegeu [31]). No obstant això, diversos estudis han mostrat escenaris en els quals es pot passar de l'un a l'altre (e. g., [20, 24, 11]) o bé en els quals tots dos enfocaments hi juguen un paper (e. g., [10]). Fins i tot s'han proposat punts de vista unificats (e. g., [4, 67]) en els quals el temps de fallida és modelat com el primer moment en què un cert procés estocàstic creua una barrera.

4.1 El preu d'un bo amb fallida

Els bons són un objecte d'estudi central en matemàtica financera ja que a través d'ells és possible estructurar contractes més complexos.

¹⁸ Per *preu adequat* s'ha d'entendre un preu que no doni lloc a *oportunitats d'arbitratge*. Intuïtivament, es pot pensar que, quan el mercat és lliure d'oportunitats d'arbitratge, per guanyar diners necessàriament hom ha d'exposar-se al risc. Per a un estudi detallat sobre l'arbitratge referim el lector interessat a [7].

¹⁹ Per a l'obtenció de l'equació (15) el lector interessat pot consultar [6, 22, 37, 52, 65]. Per a una presentació detallada sobre l'operador $\mathbb{E}^*[\cdot | \mathcal{F}_t]$, vegeu [28].

²⁰ Dues mesures de probabilitat definides sobre el mateix espai de mesura $(\Omega, \mathcal{F})$, ν_1 i ν_2 , són equivalents si per a cada $A \in \mathcal{F}$, es compleix que $\nu_1(A) = 0 \iff \nu_2(A) = 0$.

²¹ Com s'ha esmentat en la introducció, Jarrow és un dels estudiants de Merton.

DEFINICIÓ 8. Un *bo* amb estructura de cupons $(c_i, t_i)_{i=1, \dots, n}$, valor nominal $N > 0$ i maduresa $T > 0$ és un contracte financer amb benefici

$$N + \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{\{t=t_i\}},$$

en què $c_1, \dots, c_n \geq 0$ i $0 \leq t_1, \dots, t_n \leq T$ són unes quantitats i dates, respectivament, fixades en el contracte. Quan $c_1 = \dots = c_n = 0$, es diu que el bo és un *bo sense cupons*.

Estudiarem a continuació el problema de valorar bons amb fallida, des dels dos enfocaments de la teoria quantitativa del risc creditici. En el cas del model estructural, seguim el model de Merton, ja que, si bé és un model simplista, permet presentar les complicacions i tècniques de càlcul que apareixen típicament dins del model estructural. Obtindrem, en particular, la fórmula de Black-Merton-Scholes.

4.1.1 Enfocament estructural. Aquest és l'escenari:

1. Una empresa ven un bo sense cupons, amb valor nominal N i maduresa T .
2. Les polítiques de reestructuració de l'empresa estableixen que es declararà la fallida si el capital cau per sota d'un nivell crític.
3. En cas de fallida es pagarà, com a recuperació, una fracció $\alpha \in [0, 1]$ del capital de l'empresa al temps de la maduresa.

Suposem que el capital d'una empresa i el nivell crític estan modelats pels processos estocàstics $(S_t)_{t \in [0, T]}$ i $(\ell_t)_{t \in [0, T]}$.

Llavors aquest bo té risc de fallida i el temps de fallida està modelat per

$$\tau := \inf \{t \geq 0 : S_t \leq \ell_t\}, \quad (17)$$

amb el conveni que $\inf \emptyset = \infty$. Per tant, aquest bo amb fallida té un benefici

$$N \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + \alpha S_T \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}.$$

En virtut de la fórmula (16) i la linealitat de l'esperança, el preu d'aquest contracte és

$$D(t, T) := N \mathbb{E}^* \left[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] + \alpha \mathbb{E}^* \left[S_T \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (18)$$

El model de Merton. Sigui $(W_t^*)_{t \in [0, T]}$ un $\mathbb{P}^*$ -moviment brownià estàndard. En el model de Merton el tipus d'interès es considera constant, diguem-n'hi r . El capital de l'empresa es modela com el moviment brownià geomètric, *i. e.*, com la solució²² de l'equació diferencial estocàstica (EDE)

$$dS_t = S_t((r - \kappa) dt + \sigma dW_t^*), \quad (19)$$

²² Vegeu la secció 3.3.

on els paràmetres κ i $\sigma > 0$ són interpretats com els dividends i la volatilitat del capital, respectivament. Finalment, la barrera que dispara la fallida es defineix, només en la maduresa del bo, com a $\ell_T = N$, de tal manera que $\tau = \mathbf{1}_{\{S_T < N\}}$. Així podem reescriure el preu a (18) com a

$$D(t, T) = Ne^{-r(T-t)} \mathbb{P}^*(S_T \geq N \mid \mathcal{F}_t) + \alpha e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^*[S_T \mathbf{1}_{\{S_T < N\}} \mid \mathcal{F}_t].$$

El primer sumand es calcula directament en resoldre l'EDE de (19) i usar les propietats bàsiques del moviment brownià. En efecte,

$$\mathbb{P}^*(S_T \geq N \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}^*\left(S_t e^{(r-\kappa-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T^*-W_t^*)} \geq N \mid \mathcal{F}_t\right) = \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}^*\left(-\sigma(W_T^* - W_t^*) \leq \ln \frac{S_t}{N} + (r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{N}\right) + \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

on Φ representa la funció de distribució gaussiana estàndard. L'equació (20) se segueix del fet que, com hem vist en la secció 3.3, la solució a l'EDE de (19) és

$$S_t = S_0 \exp\left((r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t^*\right).$$

Així mateix, (21) es dedueix del fet que, condicionat a $\mathcal{F}_t$, $-\sigma(W_T^* - W_t^*)$ és una variable aleatòria amb distribució $N(0, \sigma^2(T-t))$.

El càlcul del segon sumand es pot fer de manera anàloga si fem primer un canvi de probabilitat. Sigui $\mathbb{P}^{(S)}$ la probabilitat definida en termes de la seva derivada de Radon-Nikodým $\frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*} := \exp\left(\sigma W_T^* - \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$, $\mathbb{P}^*$ -quasi segurament. Denotem per $\mathbb{E}^{(S)}$ l'esperança respecte de la probabilitat $\mathbb{P}^{(S)}$. Pel teorema de Girsanov²³ sabem que $\mathbb{P}^{(S)}$ és equivalent a $\mathbb{P}^*$, així que podem aplicar la regla de Bayes²⁴ per obtenir la relació següent:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[S_T \mathbf{1}_{\{S_T < N\}} \mid \mathcal{F}_t] &= e^{(r-\kappa)T} \mathbb{E}^*\left[\frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*} \mathbf{1}_{\{S_T < N\}} \mid \mathcal{F}_t\right] = \\ &= e^{(r-\kappa)T} \mathbb{E}^*\left[\frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*} \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbb{P}^{(S)}(S_T < N \mid \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Amb arguments similars als utilitzats en l'obtenció de (21) es pot mostrar que

$$\mathbb{E}^*\left[\frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*} \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^*\left[e^{\sigma(W_T^* - W_t^*) + W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 T} \mid \mathcal{F}_t\right] = e^{\sigma W_t^* - \frac{1}{2}\sigma^2 t} = S_t e^{(r-\kappa)t},$$

²³ Vegeu, per exemple, la secció A.15 de [45].

²⁴ En general, per a $Y \in \mathcal{F}$, obtenim

$$\mathbb{E}^*\left[Y \frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*} \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^*\left[\frac{d\mathbb{P}^{(S)}}{d\mathbb{P}^*} \mid \mathcal{F}_t\right] \mathbb{E}^{(S)}[Y \mid \mathcal{F}_t].$$

Vegeu, per exemple, el lema A.1.4 de [45].

ja que, condicionat a $\mathcal{F}_t$, $\sigma(W_T^* - W_t^*)$ és una variable aleatòria amb distribució log-normal, amb mitjana $\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 T$ i variància $\sigma^2(T - t)$.

D'altra banda, el teorema de Girsanov també ens assegura que $(W^{(S)} := W_t^* - \sigma t)_{t \in [0, T]}$ segueix un $\mathbb{P}^{(S)}$ -moviment brownià estàndard, de manera que, tal com hem fet amb el primer sumand, podem calcular que

$$\mathbb{P}^{(S)}(S_T < N \mid \mathcal{F}_t) = \Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{N}\right) + \left(r - \kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right).$$

Com a conclusió obtenim

$$\begin{aligned} D(t, T) = Ne^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{N}\right) + \left(r - \kappa - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) + \\ + \alpha S_t e^{-\kappa(T-t)}\Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{N}\right) + \left(r - \kappa + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

La fórmula acusada de destruir l'economia mundial. De la fórmula (22), prenent $\alpha = 1$ i $\kappa = 0$, podem obtenir la fórmula de Black-Merton-Scholes (1). Per a veure-ho, recordem que una *opció europea de venda* amb maduresa al temps T i preu d'exercici N és un contracte financer mitjançant el qual el comprador de l'opció adquireix el dret —però no l'obligació— de vendre determinat producte al venedor de l'opció, i T és el moment en el qual es pot fer la venda, i N el preu que cal pagar per aquest producte. Si S_T és el preu al mercat del producte en el temps T , llavors el benefici de l'opció de venda és

$$(N - S_T)_+ := \max\{N - S_T, 0\}.$$

Aleshores n'hi ha prou amb veure que

$$N\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + S_T\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} = N\mathbf{1}_{\{S_T \geq N\}} + S_T\mathbf{1}_{\{S_T < N\}} = N - (N - S_T)_+.$$

Per tant, és suficient combinar les expressions (16) i (22) per a obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}(N - S_T)_+ \mid \mathcal{F}_t\right] &= Ne^{-r(T-t)} - D(t, T) = \\ &= Ne^{-r(t-T)}\Phi\left(-\frac{\ln\frac{S_t}{N} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) - \\ &\quad - S_t\Phi\left(-\frac{\ln\frac{S_t}{N} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right). \end{aligned}$$

Extensions del model de Merton. El model considerat abans es pot estendre considerant:

- Barreres estocàstiques per a definir la fallida.
- Tipus d'interès estocàstics.
- Altres dinàmiques per al capital de l'empresa i el tipus d'interès (e. g., modelar usant l'exponencial d'un procés de Lévy o d'un moviment brownià fraccionari).

Cadascuna d'aquestes extensions respon al desig de modelar característiques específiques del fenomen que s'observen en la pràctica. Òbviament, cadascuna dóna lloc a problemes nous i, per tant, al desenvolupament d'eines matemàtiques noves. Per exemple, el fet de considerar barreres estocàstiques porta a l'estudi del temps de xoc d'un brownià pel que fa a una barrera estocàstica. Aquest és un problema del qual només es tenen solucions parcials, i no és fàcil trobar fórmules explícites quan la barrera deixa de ser una recta.²⁵ Modelar els tipus d'interès de manera estocàstica complica clarament els càlculs de la fórmula (16). D'altra banda, modelar l'evolució del capital mitjançant processos diferents comporta la necessitat de desenvolupar el càlcul estocàstic i el càlcul numèric corresponents. La complexitat d'estendre el model simultàniament en aquestes tres direccions és evident.

4.1.2 L'enfocament de forma reduïda per al risc creditici. Com hem vist, en l'enfocament estructural, l'esdeveniment de fallida és endogen i la modelització recau sobre la dinàmica assumida per als processos que descriuen l'evolució del capital de l'empresa i la barrera crítica. En contrast, en l'enfocament de forma reduïda, es considera que l'esdeveniment de fallida és exogen i la modelització recau sobre la dinàmica assumida per a la *intensitat de fallida* $(\gamma_t)_{t \in [0, T]}$ i el *procés de risc*

$$\Gamma_t := \int_0^t \gamma_s \, ds, \quad t \in [0, T].$$

En l'enfocament de forma reduïda se suposa que la probabilitat de fallida està descrita per $(\gamma_t)_{t \in [0, T]}$ segons la relació següent:

$$\mathbb{P}^*(\tau > t \mid \mathcal{F}_t) = e^{-\Gamma_t} = \exp\left(-\int_0^t \gamma_s \, ds\right). \quad (23)$$

A [60, capítol 5] es pot trobar una descripció d'alguns models usuals per a processos de risc i de tècniques per a calibrar la intensitat de fallida a partir d'altres contractes amb el risc de fallida com les denominades *permutes d'incompliment creditici* —o bé, *credit default swaps*. Cal esmentar que, donat un model per al procés de risc, sempre és possible construir un temps d'aturada que satisfaci (23), per exemple, prenent τ com el primer salt d'un procés de Poisson (cf. (3)) al qual hem canviat el temps fent servir $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$; vegeu-ne els detalls a [38].

²⁵ El lector interessat pot trobar un recull de resultats relacionats a [9].

Una altra diferència substancial entre ambdós enfocaments és que en l'enfocament estructural la informació de referència $(\mathbb{F})$ és suficientment rica per a saber si l'esdeveniment de fallida ha ocorregut²⁶ o no. Mentre que això no passa en l'enfocament d'intensitat, a causa de la naturalesa exògena de l'esdeveniment de fallida. En canvi, la informació disponible al mercat queda modelada per la *filtració engrandida*²⁷ $\mathbb{G} := (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, T]}$ definida com a

$$\mathcal{G}_t := (\mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge s), s \leq t).$$

Per construcció, amb la informació donada per $\mathbb{G}$ sí que podem saber si l'esdeveniment de fallida ha ocorregut o no. Denotarem per $\mathbb{H} := (\mathcal{H}_t)_{t \in [0, T]}$ la filtració natural generada pel procés $(H_t := \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}})_{t \in [0, T]}$. Amb aquesta notació escriurem $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$.

El càlcul dels preus de derivats es basa en el resultat següent, habitualment denominat *el lema clau de l'enfocament de forma reduïda*.²⁸

LEMA 9. *Siguin $0 \leq t < s \leq T$. Si X és $\mathcal{G}_T$ -mesurable aleshores tenim que*

$$\mathbb{E}^*[\mathbf{1}_{\{\tau > s\}} X \mid \mathcal{G}_t] = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}^*[X \mathbf{1}_{\{\tau > s\}} \mid \mathcal{F}_t]}{\mathbb{P}^*(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)}. \quad (24)$$

La importància d'aquest resultat és deguda al fet següent. Per a calcular el terme de l'esquerra de (24), en principi, hauríem de comptar la informació continguda a $\mathcal{G}_t$; no obstant això, la nostra filtració de referència és més petita, *i. e.*, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$. Malgrat això, aquest lema clau ens permet expressar aquest càlcul en termes d'esperances condicionades a la informació de $\mathcal{F}_t$, que sí que coneixem.

Usant el lema clau podem donar l'expressió general del preu d'un bo sense cupons, amb valor nominal N i maduresa T . En efecte, fent servir (15) i (24), el preu d'aquest bo és

$$\begin{aligned} D(t, T) &= N \mathbb{E}^* \left[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{G}_t \right] = \\ &= N \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}^* \left[\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right]}{\mathbb{P}^*(\tau > t \mid \mathcal{F}_t)} = \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}^* \left[\exp \left(- \int_t^T r_s + \lambda_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Com hem esmentat abans, una part de la importància que té l'estudi dels bons rau en el fet que contractes més complexos es poden expressar en termes de bons. En conseqüència, el càlcul del preu d'aquests contractes està relacionat amb el càlcul d'expressions com la que apareix a (25). El càlcul explícit d'aquesta

²⁶ És a dir, $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$ per a tot t , o sigui, τ és un *temps d'aturada* respecte de la filtració $\mathbb{F}$.

²⁷ A [15] es pot trobar una exposició sobre el tema de l'engrandiment de les filtracions.

²⁸ Vegeu la secció 5 de [6] i la secció 8 de [37].

expressió depèn del model que suposem per al tipus d'interès i per a la intensitat de fallida. Observem, no obstant això, que el preu del bo amb fallida equival al preu d'un bo sense fallida en el qual el tipus d'interès no és $(r_t)_{t \geq 0}$ sinó $(r_t + \lambda_t)_{t \geq 0}$.

Un exemple recent és el que s'ocupa de modelar el tipus d'interès i el procés de risc per mitjà de processos fraccionaris o processos d'àmbit. Tot i que les tècniques, la complexitat de càlcul i les implicacions de cadascuna d'aquestes opcions són significativament diferents, en tots dos casos es pot obtenir una expressió tancada per a (25). En el cas d'un model que fa servir processos fraccionaris (vegeu [5]), aquesta expressió és de la forma

$$D(t, T) = e^{A(t, T)} \exp \left(- \int f(s, t, T) dB_s^H \right),$$

on A i f són funcions deterministes que depenen només dels paràmetres del model, i la integral és respecte d'un brownià fraccionari amb paràmetre de Hurst $H > \frac{1}{2}$. En el cas del model que fa servir un procés d'àmbit, es pot obtenir una expressió amb la mateixa estructura però en la qual, com esmentem en la secció 2.4, la integral estocàstica s'ha de prendre en el sentit de Walsh [66] i respecte a una *mesura aleatòria de Wiener* (vegeu [13]).

5 Conclusions

En aquest article hem presentat algunes de les idees, dels models i de les tècniques bàsics de la teoria quantitativa del risc creditici. La llista de referències bibliogràfiques —clàssiques i recents— que hem citat al llarg del text permetrà al lector aprofundir en la matèria i trobar tot un univers de temes que no han estat tractats aquí.

Hem intentat mostrar exemples clàssics juntament amb propostes de discussió i recerca actuals, amb la finalitat de posar de manifest que l'estudi de la matemàtica financera és un camp actiu i en desenvolupament constant. Més encara, hem procurat també fer veure que els problemes tractats en aquesta branca de les matemàtiques tenen una gran complexitat teòrica i que les seves aplicacions comprenen escenaris en diverses branques de la ciència.

Quin tipus de matemàtiques es fan en la branca de matemàtiques financeres? És una pregunta recurrent avui en dia, per part dels matemàtics i també dels científics i del públic en general. Esperem que aquest article hagi servit per a donar una resposta parcial a aquesta pregunta i, amb sort, haver convençut el lector de la necessitat de participar en aquesta branca bella, fèrtil, profunda i útil de les matemàtiques.

Agraïments

L'autor agraeix a la doctora Marta Sanz-Solé que l'hagi encoratjat a fer aquest treball en el marc del Premi Albert Dou. Agraeix també al revisor anònim la seva lectura detallada i els suggeriments pertinents que van permetre millorar la versió preliminar d'aquest article.

Referències

- [1] BACHELIER, L. «Théorie de la spéculation». *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), 17 (1900), 21–86.
- [2] BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; BENTH, F. E.; VERAART, A. E. D. «Ambit processes and stochastic partial differential equations». A: *Advanced mathematical methods for finance*. Heidelberg: Springer, 2011, 35–74.
- [3] BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; SCHMIEGEL, J. «Ambit processes: with applications to turbulence and tumour growth». A: *Stochastic analysis and applications*. Berlín: Springer, 2007, 93–124. (Abel Symp.; 2)
- [4] BÉLANGER, A.; SHREVE, S. E.; WONG, D. «A general framework for pricing credit risk». *Math. Finance*, 14 (3) (2004), 317–350.
- [5] BIAGINI, F.; FINK, H.; KLÜPPELBERG, C. «A fractional credit model with long range dependent default rate». *Stochastic Process. Appl.*, 123 (4) (2013), 1319–1347.
- [6] BIELECKI, T. R.; RUTKOWSKI, M. *Credit risk: modelling, valuation and hedging*. Berlín: Springer-Verlag, 2002. (Springer Finance)
- [7] BJÖRK, T. *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
- [8] BLACK, F.; SCHOLES, M. «The pricing of options and corporate liabilities». *J. Polit. Econ.*, 81 (1973), 637–654.
- [9] BORODIN, A. N.; SALMINEN, P. *Handbook of Brownian motion-facts and formulae*. 2a ed. Basilea: Birkhäuser Verlag, 2002. (Probability and its Applications)
- [10] CAMPI, L.; ÇETIN, U. «Insider trading in an equilibrium model with default: a passage from reduced-form to structural modelling». *Finance Stoch.*, 11 (4) (2007), 591–602.
- [11] ÇETIN, U.; JARROW, R.; PROTTER, P.; YILDIRIM, Y. «Modeling credit risk with partial information». *Ann. Appl. Probab.*, 14 (3) (2004), 1167–1178.
- [12] CONT, R.; TANKOV, P. *Financial modelling with jump processes*. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall / CRC, 2004. (Chapman & Hall / CRC Financial Mathematics Series)
- [13] CORCUERA, J. M.; FARKAS, G.; SCHOUTENS, W.; VALKEILA, E. «A short rate model using ambit processes». A: *Malliavin calculus and stochastic analysis*. Nova York: Springer, 2013, 525–553. (Springer Proc. Math. Stat.; 34)
- [14] CORCUERA, J. M.; FARKAS, G.; VALDIVIA, A. «Ambit processes, their volatility determination and their applications». A: KOROLYUK, V.; LIMNIOS, N.; MISHURA, Y.; SAKHNO, L.; SHEVCHENKO, G. (ed.). *Modern stochastics and applications*. Springer, 2014.
- [15] CORCUERA, J. M.; VALDIVIA, A. «Enlargements of filtrations and applications» (Preprint 2011), disponible a <http://arxiv.org/abs/1201.5870>.

- [16] DELGADO, R.; JOLIS, M.; UTZET, F. «Mandelbrot i l'atzar». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 27 (2) (2012), 121–160.
- [17] DICKSON, D. C. M.; WATERS, H. R. «The distribution of the time to ruin in the classical risk model». *Astin Bull.*, 32 (2) (2002), 299–313.
- [18] DOUKHAN, P.; OPPENHEIM, G.; TAQQU, M. S. *Theory and applications of long-range dependence*. Boston: Birkhäuser, 2003.
- [19] DUCH GUILLOT, G. [et al.]. *Vivir en deudocracia*. Icaria editorial, 2011.
- [20] DUFFIE, D.; LANDO, D. «Term structure of credit spreads with incomplete accounting information». *Econometrica*, 69 (2001), 633–664.
- [21] DUFFIE, D.; SINGLETON, K. J. «Modeling term structures of defaultable bonds». *Rev. Financ. Stud.*, 12 (4) (1999), 197–226.
- [22] ELLIOT, R. J.; KOPP, P. E. *Mathematics of financial markets*. 2a ed. Nova York: Springer, 2005. (Springer Finance / Springer Finance Textbooks)
- [23] ERDŐS, P.; RÉNYI, A. «On random graphs. I». *Publ. Math. Debrecen*, 6 (1959), 290–297.
- [24] GUO, X.; JARROW, R. A.; ZENG, Y. «Credit risk models with incomplete information». *Math. Oper. Res.*, 34 (2) (2009), 320–332.
- [25] HARFORD, T. «Black-Scholes: The maths formula linked to the financial crash». BBC News Magazine, 27 abril 2012, disponible a <http://www.bbc.com/news/magazine-17866646>.
- [26] HIDA, T. *Brownian motion*. Nova York; Berlín: Springer-Verlag, 1980 [Traduït del japonès per l'autor i T. P. Speed.] (Applications of Mathematics; 11)
- [27] HIDA, T.; KUO, H.-H.; POTTHOFF, J.; STREIT, L. *White noise. An infinite-dimensional calculus*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1993. (Mathematics and its Applications; 253)
- [28] JACOD, J.; PROTTER, P. *Probability essentials*. Berlín: Springer-Verlag, 2000. (Universitext)
- [29] JARROW, R. A. «Speech in honor of Robert C. Merton». Mathematical Finance Day Lifetime Achievement Award, 1999.
- [30] JARROW, R. A.; LANDO, D.; TURNBULL, S. M. «A Markov model for the term structure of credit risk spreads». *Rev. Financ. Stud.*, 10 (2) (1997), 481–523.
- [31] JARROW, R. A.; PROTTER, P. «Structural versus reduced form models: a new information based perspective». *Journal of Investment Management*, 2 (2) (2004), 1–10.
- [32] JARROW, R. A.; TURNBULL, S. M. «Credit risk: drawing the analogy». *Risk Magazine*, 5 (9) (1992).
- [33] JARROW, R. A.; TURNBULL, S. M. «Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk». *J. Finance*, 50 (1995), 53–85.

- [34] JOST, C. «Transformation formulas for fractional Brownian motion». *Stochastic Process. Appl.*, 116 (10) (2006), 1341–1357.
- [35] KHOSHNEVISAN, D. «A primer on stochastic partial differential equations». A: *A minicourse on stochastic partial differential equations*. Berlín: Springer, 2009, 1–38. (Lecture Notes in Math.; 1962)
- [36] KUO, H.-H. *Introduction to stochastic integration*. Nova York: Springer, 2006. (Universitext)
- [37] LAMBERTON, D.; LAPEYRE, B. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. 2a ed. Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall / CRC, 2008. (Chapman & Hall / CRC Financial Mathematics Series)
- [38] LANDO, D. «On Cox processes and credit risky securities». *Rev. Derivatives Res.*, 2 (1998), 99–120.
- [39] MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. San Francisco, Calif.: W. H. Freeman and Co., 1982.
- [40] MANDELBROT, B. B. «How fractals can explain what's wrong with Wall Street». *Sci. Am.*, 15 setembre 2008, disponible a <http://www.scientificamerican.com/article/multifractals-explain-wall-street/>.
- [41] MANDELBROT, B. B.; HUDSON, R. L. *The (mis)behavior of markets. A fractal view of risk, ruin, and reward*. Nova York: Basic Books, 2004.
- [42] MANDELBROT, B. B.; VAN NESS, J. W. «Fractional Brownian motions, fractional noises and applications». *SIAM Rev.*, 10 (4) (1968), 422–437.
- [43] MERTON, R. «Theory of rational option pricing». *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (1973), 141–183.
- [44] MOLCHAN, G. M.; GOLOSOV, J. «Gaussian stationary processes with asymptotically a power spectrum». *Soviet. Math. Dokl.*, 10 (1969), 134–137.
- [45] MUSIELA, M.; RUTKOWSKI, M. *Martingale methods in financial modelling*. 2a ed. Berlín: Springer-Verlag, 2005. (Stochastic Modelling and Applied Probability; 36)
- [46] NUALART, D. «Equacions en derivades parcials estocàstiques pertorbades per un soroll blanc». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 14 (1) (1999), 85–98.
- [47] NUALART, D. «Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications». A: *Stochastic models*. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 2003, 3–39. (Contemp. Math.; 336)
- [48] ØKSENDAL, B. K. *Stochastic differential equations; an introduction with applications*. 6a ed. Heidelberg: Springer, 2013. (Universitext)
- [49] PIPIRAS, V.; TAQQU, M. S. «Integration questions related to fractional Brownian motion». *Probab. Theory Related Fields*, 118 (2) (2000), 251–291.

- [50] PIPIRAS, V.; TAQQU, M. S. «Are classes of deterministic integrands for fractional Brownian motion on an interval complete?» *Bernoulli*, 7 (6) (2001), 873–897.
- [51] PLISKA, S. *Introduction to mathematical finance: discrete time models*. Malden: Blackwell Publishers, 1997.
- [52] PROTTER, P. «A partial introduction to financial asset pricing theory». *Stochastic Process. Appl.*, 91 (2) (2001), 169–203.
- [53] REVUZ, D.; YOR, M. *Continuous martingales and Brownian motion*. 3a ed. Berlín: Springer-Verlag, 1999. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 293)
- [54] RUBINSTEIN, R. Y.; KROESE, D. P. *Simulation and the Monte Carlo method*. 2a ed. Hoboken, N. J.: Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 2008. (Wiley Series in Probability and Statistics)
- [55] SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [56] SAMORODNITSKY, G. «Long range dependence». *Found. Trends Stoch. Syst.*, 1 (3) (2006), 163–257.
- [57] SAMUELSON, P. A. *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1947.
- [58] SATO, K. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 68)
- [59] SCHOUTENS, W. *Lévy processes in finance: pricing financial derivatives*. Nova York: John Wiley & Sons, 2003.
- [60] SCHOUTENS, W.; CARIBONI, J. *Lévy processes in credit risk*. Chichester: John Wiley & Sons, 2009.
- [61] SCHUSS, Z. *Theory and applications of stochastic processes. An analytical approach*. Nova York: Springer, 2010. (Applied Mathematical Sciences; 170)
- [62] SHIRYAEV, A. N. *Essentials of stochastic finance. Facts, models, theory*. River Edge, N. J.: World Scientific Publishing Co., 1999. (Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability; 3)
- [63] SHREVE, S. E. *Stochastic calculus for finance. I. The binomial asset pricing model*. Nova York: Springer-Verlag, 2004. (Springer Finance)
- [64] SOLÉ, J. LL. «El món de les variables sense moments finits de tots els ordres: de la paradoxa de Sant Petersburg als processos de Lévy». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 27 (1) (2012), 63–113.
- [65] STEELE, J. M. *Stochastic calculus and financial applications*. Nova York: Springer-Verlag, 2001. (Applications of Mathematics (New York); 45)

- [66] WALSH, J. B. «An introduction to stochastic partial differential equations». A: *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, XIV-1984*. Berlín: Springer, 1986, 265–439. (Lecture Notes in Math.; 1180)
- [67] WONG, D. «A unifying credit model». *Capital Markes Group Technical Report* (1998).

UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
08007 BARCELONA, ESPANYA
arturo.valdivia@ub.edu

English summaries

Tim G. Myers, Francesc Font, Vincent Cregan, and Michelle M. MacDevette

Nanomaths: mathematical modelling at the nanoscale

In this paper we discuss three problems recently studied within the Industrial Maths Research Group at the Centre de Recerca Matemàtica, where continuum theory may be applied to describe nanoscale phenomena:

1. Heat transfer with nanofluids: Experimental results concerning the remarkable heat transfer characteristics of nanofluids are at times contradictory. We apply a boundary layer analysis to show that a standard model which has been used by many authors to predict an improvement in heat transfer with increasing nanoparticle concentration in fact shows a decrease.
2. Nanoparticle melting: Nanoparticles often exhibit a sharp increase in melting rate as the size decreases. A mathematical model will be presented which predicts this phenomena and explains the experimentally observed abrupt melting of the smallest nanoparticles.
3. Enhanced flow in carbon nanotubes (CNTs): This model shows that the experimentally observed enhancement can be explained using standard flow equations but with a depletion layer between the liquid and solid interfaces. The results also provide one physical explanation for the Navier-slip condition.

Keywords: nanotubes, nanofluids, nanoparticles, heat transfer, thermal conductivity, phase change.

MSC2010 Subject Classification:80A20, 76T99, 80A22.

Josep Pla i Carrera*Joseph-Louis Lagrange: in memoriam*

This article is a tribute to Joseph-Louis Lagrange in the occasion of the two hundredth anniversary of his death. It has three parts: the first part is biographical; the second includes succinctly your scientific production; and the third, most extensive and mathematics, explains some of the results achieved by the famous mathematician.

Keywords: Josep-Louis Lagrange, biography of a mathematician, history of mathematics.

MSC2010 Subject Classification: 01A50, 01A70.

Arturo Valdivia*Financial mathematics in times of crisis*

In this paper we present some of the important stochastic processes, and their corresponding stochastic calculus, for quantitative credit risk theory. This branch of mathematical finance focuses on the study of defaultable claims, that is to say, financial contracts prone to economic losses produced when one of the parties signing the contract fails —whether intentionally or unintentionally— to fulfil its contractual obligations. These kinds of contracts are ubiquitous in the current economic crisis; thus we are interested in discussing these contracts from a mathematical finance point of view in these times of global crisis.

Keywords: stochastic calculus, mathematical finance, stochastic modelling, stochastic processes, credit risk.

MSC2010 Subject Classification: 60-01, 60H30 , 60G05.

Instruccions per als autors

Els articles sotmesos a publicació s'han d'enviar als editors o a qualsevol membre del comitè editorial, per correu electrònic, preferentment en format PDF. Els originals han de contenir la versió anglesa del títol, un resum breu en català i en anglès, paraules clau en català i en anglès i els codis de la classificació per matèries MSC2010.

Les versions definitives dels articles acceptats s'han de presentar en codi T_EX, preferentment en l'estil L^AT_EX propi del BUTLLETÍ. Aquest estil es pot obtenir a les pàgines web de la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM). Fem notar que en aquesta publicació s'utilitza preferentment el punt per a separar decimals, en lloc de la coma recomanada per l'IEC, per tal de facilitar la comprensió de les expressions matemàtiques. Per tal d'accelerar el procés de producció, es prega als autors que segueixin les indicacions contingudes en el document d'exemple.

La versió en paper del BUTLLETÍ s'imprimeix en blanc i negre. Quan un article contingui figures en color i es consideri convenient, l'autor proporcionarà una versió dels gràfics substituint el color per tons de grisos i línies de gruix variable. Així mateix modificarà els comentaris que facin referència al color de les figures. En qualsevol cas el BUTLLETÍ publicarà l'original en color en el seu format electrònic.

Els autors dels articles publicats al BUTLLETÍ en retenen el dret de còpia (*copyright*) i autoritzen l'IEC a difondre'ls, tant a través de la publicació impresa com mitjançant els portals digitals propis o d'altres amb què s'estableixin els convenis oportuns a aquest efecte. És responsabilitat dels autors assegurar que es disposa dels drets de reproducció dels gràfics i de les figures que hi apareguin. Cada autor rebrà una còpia en PDF d'alta qualitat de la versió digital del seu article i un exemplar imprès del número del BUTLLETÍ en el qual es publiqui.

La correspondència administrativa relacionada amb el BUTLLETÍ s'ha d'adreçar a la SCM.

Comitè editorial

Julia Cufi (editor en cap)
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
jcufi@mat.uab.cat

Bartomeu Coll
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
tomeu.coll@uib.cat

Núria Fagella
Dep. de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
fagella@maia.ub.es

Josep Maria Font
Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística
Universitat de Barcelona
jmfont@ub.edu

Armengol Gasull
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat

Gábor Lugosi
ICREA i Departament d'Economia
Universitat Pompeu Fabra
gabor.lugosi@upf.edu

Rosa Camps (editora adjunta)
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
rcamps@mat.uab.cat

Jorge Mateu
Departament de Matemàtiques
Universitat Jaume I
mateu@mat.uji.es

Marc Noy
Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
marc.noy@upc.edu

Francesc Planas
Departament de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya
francesc.planas@upc.edu

Agustí Reventós
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
agusti@mat.uab.cat

Marta Sanz-Solé
Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística
Universitat de Barcelona
marta.sanz@ub.edu



Societat Catalana de Matemàtiques

La **Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)** és una societat filial de l'Institut d'Estudis Catalans, que continua les activitats de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències, que fou fundada per l'Institut l'any 1931. Les finalitats de la **SCM** són: el conreu de les ciències matemàtiques, l'extensió del seu coneixement en la societat catalana, el foment del seu ensenyament i de la seva investigació teòrica i aplicada, així com la publicació de tota mena de treballs que s'adeqüin a aquests objectius. La **SCM** desenvolupa les seves activitats en les terres de llengua i cultura catalanes. El català és, doncs, la llengua pròpia de la **SCM** i la que és usada normalment en tots els seus actes i publicacions.

La **SCM** edita les publicacions periòdiques *SCM/Notícies* i *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*. Els socis de la **SCM** reben, gratuïtament, aquestes dues publicacions.

La **SCM** té convenis de reciprocitat amb diverses societats matemàtiques d'arreu del món, mitjançant els quals els socis de la **SCM** obtenen una reducció en la quota de soci d'aquestes societats. Així mateix, els socis de la **SCM** poden fer-se socis de la Societat Matemàtica Europea pagant una quota complementària.

La Junta Directiva de la **SCM** està constituïda per les persones següents:

PRESIDENT: Xavier Jarque i Ribera

VICEPRESIDENT: Enric Ventura i Capell

ADJUNTA A VICEPRESIDÈNCIA: Iolanda Guevara i Casanova

SECRETARI: Albert Ruiz i Cirera

TRESORERA: Natàlia Castellana i Vila

VOCALS: Núria Fagella i Rabionet, Josep Grané i Manlleu, Agustí Reventós i Tarrida, Carles Romero i Chesa, Oriol Serra i Albó, Esther Silberstein, Manel Udina i Abelló

DELEGAT DE L'IEC: Joan Girbau i Badó

L'adreça de la **SCM** és carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona. Telèfon: 933 248 583. Fax: 932 701 180. Correu electrònic: scm@iec.cat. Adreça web: <http://scm.iec.cat>.

El Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques publica, en llengua catalana, exposicions matemàtiques de qualitat, que puguin interessar a un nombre elevat de lectors. Es donarà prioritat a aquells treballs en què destaquin la claredat d'exposició i l'interès general del tema. El Butlletí està obert a tots els camps de la matemàtica i també als aspectes matemàtics de les ciències experimentals, la tecnologia, l'economia, etc., així com a altres àrees, com la història, la didàctica i la filosofia, sempre que els treballs tinguin un component matemàtic important. També tenen cabuda al Butlletí aquells articles que desenvolupin un aspecte significatiu de la problemàtica de la professió matemàtica al nostre país.

El Butlletí publica un volum a l'any, dividit en dos números, que es trameten gratuïtament a tots els socis. El Butlletí es publica també en format electrònic. L'edició electrònica del Butlletí pot obtenir-se des del portal de revistes científiques en línia de l'IEC o al servidor <http://scm.iec.cat>.

La correspondència administrativa s'ha d'adreçar a la Societat Catalana de Matemàtiques.

Editor en cap _____

Julia Cufí

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Editora adjunta _____

Rosa Camps

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Comitè editorial _____

Bartomeu Coll

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de les Illes Balears

Jorge Mateu

Departament de Matemàtiques

Universitat Jaume I

Núria Fagella

Dep. de Matemàtica Aplicada i Anàlisi

Universitat de Barcelona

Marc Noy

Departament de Matemàtica Aplicada II

Universitat Politècnica de Catalunya

Josep Maria Font

Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística

Universitat de Barcelona

Francesc Planas

Departament de Matemàtica Aplicada I

Universitat Politècnica de Catalunya

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Agustí Reventós

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Gábor Lugosi

ICREA i Departament d'Economia

Universitat Pompeu Fabra

Marta Sanz-Solé

Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística

Universitat de Barcelona

Societat Catalana de Matemàtiques

Carrer del Carme, 47 - 08001 Barcelona

tel. 933 248 583 - fax 932 701 180

scm@iec.cat - <http://scm.iec.cat>